

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 24 • HEFT 3 • OKTOBER 1935

Das negative Glimmlicht

Untersuchungen bei behinderter Entladung in Wasserstoff

Von W. Weizel und H. Fischer

(Mit 13 Figuren)

Inhaltsangabe: In das negative Glimmlicht einer Entladung in Wasserstoff ist eine dritte Elektrode eingebracht, deren Potential zwischen dem der Anode und der Kathode variiert wird. Das Potential dieser Hilfselektrode kann vom Anodenpotential erheblich verschieden gewählt werden, ohne daß bei konstantem Kathodenstrom die Brennspannung sich zunächst ändert. Bei noch niedrigerem Potential der Hilfselektrode sinkt die Brennspannung. In jedem Fall sind die an der Hilfselektrode abgenommenen Ströme sehr bedeutend. Aus den Messungen wird gefolgert: 1. Steht die Anode im Glimmlicht, so ist ihr Potential niedriger als das des Glimmlichts. — 2. Zu einer solchen im Glimmlicht stehenden Anode fließen je nach Druck und Brennspannung Ionenströme in Höhe von 10–30% des Elektronenstroms. — 3. Derselbe Ionenstrom fließt zu einer Hilfselektrode, die isoliert im Glimmlicht steht. — 4. Das Einbringen einer Elektrode, Anode oder Hilfselektrode erniedrigt die Brennspannung um so mehr, je tiefer diese Elektrode im Glimmlicht steht. — 5. Die Erniedrigung der Brennspannung hängt nur wenig vom Potential dieser Elektrode ab. — 6. Die beobachteten Erscheinungen sind Diffusionseffekte und sind daher mit der Rogowskischen Theorie nicht erfaßbar. — 7. Unsere Entladung stellt eine Form der „behinderten Entladung“ dar.

Vor einiger Zeit hat Rogowski¹⁾ die ältere Townsendsche Theorie des elektrischen Durchschlags weitergeführt, indem er die in der Entladung sich entwickelnde Raumladung in die Betrachtung einbezog. Hierdurch erweiterte er den Anwendungsbereich der Theorie auch auf bereits gezündete, stationär brennende Entladungen. Von Rogowski wurden folgende Elementarvorgänge berücksichtigt: Die Wanderung der Ladungsträger (Elektronen und Ionen) im Feld (Drift), die Ionenpaarbildung durch Elektronenstoß und die verzerrende Wirkung der aus Ionen- und Elektronendichte sich ergebenden Raumladung auf das statische Feld. Die Ionisation durch Stoß positiver Ionen wurde vernachlässigt, ebenso Diffusion und Rekombination der Ladungsträger. Schließlich sollte die Zahl der pro Zentimeter Driftstrecke von einem Elektron gebildeten Ionen-

1) W. Rogowski, Arch. f. Elektrotechnik **24**. S. 688. 1930; **25**. S. 551. 1931; **27**. S. 523. 1933; vgl. Zusammenfassung, Ztschr. f. Phys. **82**. S. 473. 1932.

paare nur von Druck und Feld, nicht aber von anderen Umständen abhängen.

Zweifellos ist Rogowskis Theorie imstande manche Eigenschaften der Glimmentladung wenigstens qualitativ richtig zu beschreiben. Ob man hieraus bereits folgern darf, daß sie eine brauchbare Näherung ist, die gesamten Vorgänge in der Glimmentladung zu erfassen, ist noch nicht entschieden. Man müßte noch nach Erscheinungen suchen, die von Diffusion oder Rekombination herühren. Sind diese Vorgänge unbedeutend, so sind Rogowskis Vernachlässigungen berechtigt.

Um hierzu etwas beizutragen, haben wir an einer Art behinderter Entladung eine große Zahl von Versuchen ausgeführt. Diese haben gleichzeitig einen Zusammenhang mit den Vorgängen in der sog. Hohlkathode ergeben. Die Wirkungsweise der Hohlkathode besteht bekanntlich darin, daß besonders in stark konkav gekrümmten Kathoden (gewöhnlich Hohlzylinder) eine beträchtliche Erhöhung der Stromdichte stattfindet. Experimentelle Untersuchungen hierüber sind von Güntherschulze¹⁾ angestellt worden, und auch an Erklärungsversuchen hierzu hat es nicht gefehlt²⁾.

Die in dieser Arbeit beschriebenen Entladungen finden in einem Entladungsraum mit 3 Elektroden statt. Eine dieser Elektroden ist stets Anode, d. h. ihr Potential ist stets das Höchste. Die beiden anderen Elektroden, die sich in geringem Abstand gegenüberstehen, können auf beliebigen Potentialen gehalten werden. Hält man sie beide auf gleichem Potential, so bilden sie zusammen eine Hohlkathode, schaltet man eine von ihnen ganz ab, so hat man eine gewöhnliche Glimmentladung, gibt man einer von ihnen ein Potential wenig unter dem Anodenpotential, so wirkt sie wie eine (allerdings große) Sonde. Mit einem solchen 3-Elektrodenrohr kann man also den Übergang von der gewöhnlichen Glimmentladung zur Hohlkathodenentladung beobachten. Mit der 3. Elektrode als Sonde kann man aber auch den vor ihr gelegenen Entladungsraum untersuchen und diese Zone bis zu einem gewissen Grade beeinflussen.

Versuchsanordnung

Der Entladungsraum befindet sich unter einer großen Glasglocke die auf einer Grundplatte aus Messing steht. Zwei kreisscheibenförmige Messingelektroden E_1 und E_2 von 5,8 cm Durchmesser stehen sich im Abstand von 2 cm gegenüber. Als Anode dient ein großer

1) A. Güntherschulze, Ztschr. f. techn. Phys. 11. S. 49. 1930.

2) A. D. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen 2. S. 114. 1934.

Messingzylinder, zur Beobachtung seitlich aufgeschlitzt, der die beiden Scheibenelektroden umgibt (vgl. Fig. 1). Die Scheibenelektroden sind mit Wasser gekühlt. Dadurch ist es möglich, die Elektroden höher zu belasten und die Temperatur zwischen ihnen niedriger zu halten.

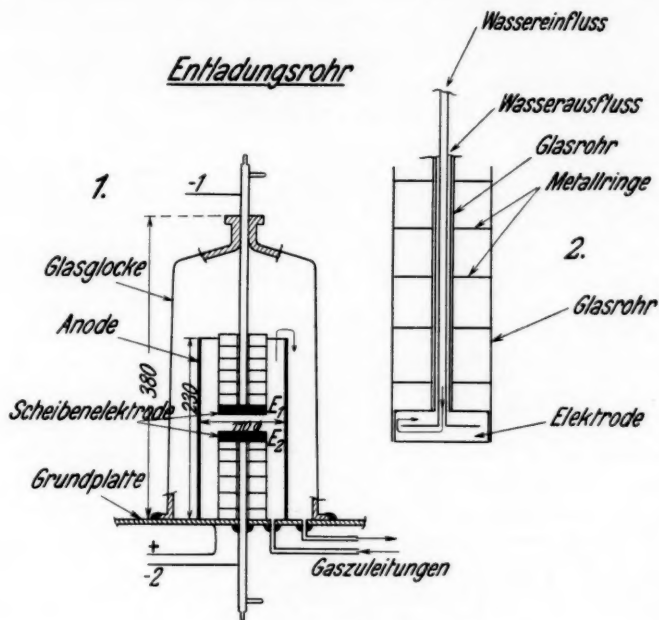


Fig. 1. Versuchsanordnung

Um den Ansatz der Entladung auf die Stirnfläche der Scheibenelektroden zu beschränken, wurden:

1. Genau passend mit der Stirnfläche abschneidende Glasrohre über die Elektroden gesteckt, die den seitlichen Ansatz der Entladung hinderten.

2. Die Zuführungen von Wasser und Strom bis zu den Elektroden durch Glasrohre isoliert.

3. Die Rückseiten der Elektroden durch eine Reihe von isolierten Messingringen geschützt, die möglichst genau an das weite äußere und das enge innere Glasrohr der Zuleitung anschließen. Der Anodenzyylinder ist ein einfaches Messingrohr ohne Wasserkühlung. Die Stromzuführung zur Anode erfolgt einfach durch die Grundplatte, die die ganze Anordnung trägt. Die Zuführung zu den Scheiben-

elektroden erfolgt durch die Wasserkühlung, die bei der unteren Scheibenelektrode isoliert durch die Grundplatte durchgeführt ist. Der Anodenzyylinder lag stets direkt am positiven Pol einer Hochspannungsmaschine, die obere Scheibenelektrode über einem Schutzwiderstand am negativen Pol. Die untere Elektrode war mit der oberen durch einen variablen hochohmigen Widerstand verbunden, sie konnte aber auch abgeschaltet, bzw. mit der Anode leitend verbunden werden. So konnte ihr Potential zwischen dem der Anode und dem der oberen Scheibenelektrode beliebig variiert werden.

Die Messungen wurden in Wasserstoff ausgeführt, der zur sorgfältigen Reinigung mit einer Gaedeschen Diffusionspumpe durch tiefgekühlte Kohle gepumpt wurde. Ausheizen des ganzen Entladungsrohres im Ofen war nicht möglich. Da die Elektroden große Mengen von Verunreinigungen abgeben, wurde die Entladung bei niedrigem Druck in strömendem Gas mit hoher Stromstärke lange Zeit betrieben. Es zeigte sich, daß nach längerem Betrieb die Brennspannungen unaufhaltsam steigen, wenn Druck und Strom konstant gehalten werden. Schließlich nähern sie sich einem Grenzwert, der sich immer wieder einstellt und nur durch absichtliche Verunreinigung des Gases vorübergehend wieder herabgesetzt werden kann. Dieser Wert wurde auch wieder erreicht, wenn der ganze Apparat abgerissen und wieder neu aufgebaut wurde. Dieser unter allen Umständen reproduzierbare Wert der Brennspannung ist so dem reinen Wasserstoff zuzuordnen. Wir konnten also die Reinheit des Gases durch die gemessenen Brennspannungen selbst überwachen.

Messungen

Vorversuche zeigten, daß bei Drucken über 2 tor (mm Hg) die Hilfelektrode die Entladung nur mehr wenig beeinträchtigte (dies gilt wenigstens bei Brennspannungen unter 1000 Volt und für Abstände der beiden Scheibenelektroden von 2 cm. Bei kleinerem Abstand können die Drucke auch höher sein). Unter 0,4 tor schlägt die Entladung in andere Formen um. Es wurden daher zahlreiche Messungen bei den Drucken 0,422 tor, 0,554 tor, 0,754 tor, 0,98 tor, 1,19 tor, 1,50 tor und 2,00 tor gemacht.

Die Potentialdifferenzen zwischen der Anode und Kathode seien als Brennspannungen V_K , zwischen Anode und Hilfelektrode (Sonde) als Hilfsspannung V_H , die zwischen Kathode und Hilfelektrode als Vorspannung U bezeichnet. Es ist dann selbstverständlich

$$(1) \quad U = V_K - V_H.$$

Analog sprechen wir vom Kathodenstrom J_K , Hilfsstrom J_H und Anodenstrom J_A , wobei wieder

$$(2) \quad J_A = J_K + J_H$$

ist. Von diesen Meßgrößen können zwei willkürlich einreguliert werden, die übrigen stellen sich dann von selbst ein. Messen wir etwa J_K , J_H , V_K und U , so muß es mathematisch ausgedrückt, zwei funktionale Verknüpfungen, etwa:

$$(3a) \quad F_1(V_K, U, J_K, J_H) = 0,$$

$$(3b) \quad F_2(V_K, U, J_K, J_H) = 0$$

geben, die der formelmäßige Ausdruck der die Entladung beherrschenden Gesetze sind. Durch eine genügend große Zahl zusammengehöriger Werte (Vierergruppen) V_K , U , J_K , J_H , die durch Messung gewonnen werden, ist im Prinzip das Gesetz (3a, 3b) ermittelt und niedergelegt.

Was die Übersicht über die Messungen und ihre Ausdeutung erschwert, ist die Tatsache, daß der Zusammenhang zwischen den 4 Meßgrößen außer durch die Gl. (3) noch durch unendlich viele andere solcher Gleichungspaare beschrieben werden kann. Hätte man nämlich zwei solcher Gleichungen ermittelt, so könnte man z. B. aus ihnen J_H oder J_K eliminieren und erhielte

$$(4a) \quad f_1(V_K, U, J_K) = 0,$$

$$(4b) \quad f_2(V_K, U, J_H) = 0$$

als völlig gleichwertige Darstellung. Man kann auch jede dieser Gleichungen nach einer der 3 Größen auflösen und es ergibt sich z. B.:

$$(5a) \quad J_K = g_1(V_K, U),$$

$$(5b) \quad J_H = g_2(V_K, U).$$

Die Form (5) eignet sich zur graphischen Darstellung, indem man Kurven konstanter Werte U in ein J_K -, V_K - bzw. J_H -, V_K -Diagramm einzeichnet. Daß aus einer genügenden Zahl genügend genauer Messungen diese Kurven im Prinzip immer ermittelt werden können, bedarf keiner Erörterung. Ein zweckmäßiges Verfahren hierzu wurde an anderer Stelle ausführlich mitgeteilt¹⁾.

Um die Messungen vollständig graphisch niederzulegen, ist es indessen nicht notwendig, die beiden Gl. (5) in je einer Kurvenschar aufzuzeichnen. Da die beiden Scheiben sich weder in der Konstruktion noch im Verhalten unterscheiden, die Anordnung also ganz

1) H. Fischer, Diss. Karlsruhe, 1935.

symmetrisch ist, kann man jede Elektrode sowohl als Kathode wie auch als Hilfselektrode auffassen. Für die Gl. (5) bedeutet dies, daß man die Indizes H und K vertauschen darf. Nach (1) wechselt U dann das Vorzeichen. Aus (5a) ergibt sich also

$$(5b) \quad \begin{cases} J_H = g_1(V_H, -U) = g_1(V_K - U, -U) \\ \quad = g_2(V_K, U). \end{cases}$$

Es genügt also, wenn man in ein einziges Diagramm auch die Kurven für negative Vorspannungen U einzeichnet.

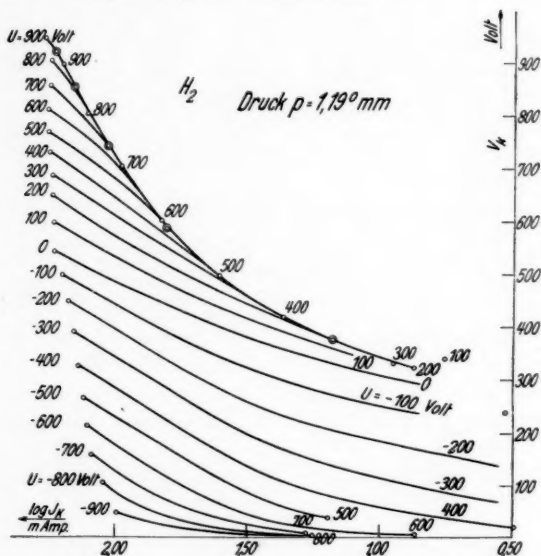


Fig. 2. Abhängigkeit des Kathodenstromes (J_K) von der Brennspannung (V_K) bei konstanter Vorspannung (U)

In der Fig. 2 ist die Kurvenschar (5a) für einen Druck von 1,19 tor aufgezeichnet, die Ströme allerdings wegen des günstigeren Formats im logarithmischen Maßstab. Für die übrigen Drücke sind entsprechende Kurvenscharen an anderer Stelle mitgeteilt¹⁾.

Gesetzmäßigkeiten

Wir versuchen jetzt aus den Messungen Gesetzmäßigkeiten abzulesen und deren Zustandekommen zu erklären.

Die untere Scheibenelektrode (Hilfselektrode) kann wie oben bemerkt sowohl 1. völlig abgeschaltet, 2. mit der Anode verbunden oder

1) H. Fischer, Diss. Karlsruhe, 1935.

3. auch allein ohne die äußere Zylinderanode als Anode verwendet werden. Im Falle 2 mißt man einen Kathodenstrom J_K , bei einer Brennspannung V_K , während sich der Anodenstrom auf Hilfsanode und Zylinderanode verteilt. Die Art der Verteilung wird durch geringfügige Ursachen, um deren Ermittlung wir uns nicht bemüht haben, bereits sehr stark beeinflußt. Schaltet man die Hilfselektrode ganz ab (sie bleibt nur durch ein Voltmeter mit einem Stromverbrauch von weniger als 0,02 mA mit der Anode verbunden), so ändert sich der Kathodenstrom J_K und die Brennspannung V_K gar nicht, das Potential der stromlosen Hilfselektrode liegt dann nur um 1 bis 2 Volt unter dem Anodenpotential. Der mit J_K gleich große Anodenstrom J_A fließt jetzt ganz zur Zylinderanode ab. Schaltet man hingegen die Zylinderanode ganz ab, so fließt der Anodenstrom zur Scheibenanode, während man wieder dieselben Werte von V_K und J_K mißt.

Es ist also innerhalb unserer Meßgenauigkeit (einige Volt bzw. 1 bis 2% des Stromes) für die Brennspannung und den Kathodenstrom völlig gleichgültig, ob die Hilfselektrode allein, oder mit der Zylinderelektrode zusammen Anode ist, oder ob sie isoliert und stromlos ist. Darauf, daß diese Feststellung nicht selbstverständlich ist, kommen wir später noch zurück.

Von unseren weiteren Messungen diskutieren wir jetzt ausführlich diejenigen, bei denen das Potential der Hilfselektrode sich vom Potential der Anode nicht allzu sehr unterscheidet, bei denen also die Hilfsspannung V_H ziemlich klein ist. Insbesondere soll zwischen Hilfselektrode und Anode noch keine selbständige Entladung möglich sein. Da der normale Kathodenfall bei etwa 300 Volt gemessen wurde, betrachten wir nur Werte von V_H bis 250 Volt. In den Figg. 3a, 3b bis 9a, 9b rechts unten und rechts oben ist die gemessene Abhängigkeit des Kathodenstroms J_K bzw. Hilfsstroms J_H von der Brennspannung V_K bei festgehaltenen Hilfsspannungen V_H (also die Kurven):

$$(6a) \quad J_K = \varphi_1(V_K, V_H)$$

$$(6b) \quad J_H = \varphi_2(V_K, V_H)$$

aufgezeichnet. Schon bei oberflächlicher Betrachtung dieser Kurvenscharen fällt auf, daß zur Hilfselektrode schon bei kleinen Hilfsspannungen beträchtliche Ströme fließen, während der Kathodenstrom J_K durch das Anlegen kleiner Hilfsspannungen kaum geändert wird. Bei 0,98 tor, 800 Volt Brennspannung und der Hilfsspannung Null hat man z. B. einen Kathodenstrom von 92 mA. Legen wir

50 Volt Hilfsspannung an, so steigt bei gleicher Brennschpannung der Kathodenstrom auf 94 mA, zur Hilfelektrode fließen aber jetzt bereits 47,5 mA.

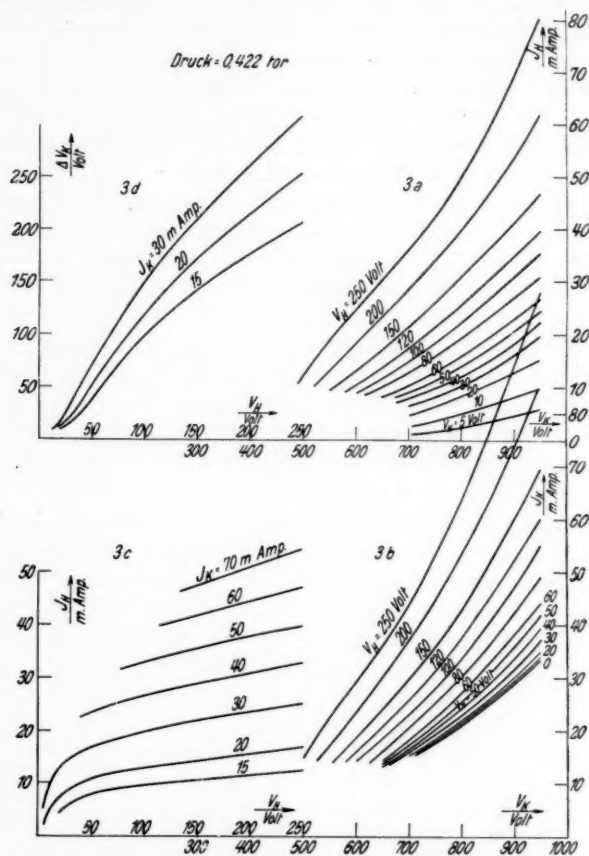


Fig. 3. Zusammenhang von Brennschpannung (V_K), Hilfsschpannung (V_H), Kathodenstrom (J_K), Hilfsstrom (J_H), beim Druck 0,422 tor

Besonders deutlich erkennt man, das schnelle Ansteigen des Hilfsstromes mit der Hilfsschpannung aus den Kurvenscharen

$$(7) \quad J_H = \psi(V_H, J_K),$$

die man in den Figg. 3c bis 9c links unten findet. Hier sind für festgehaltene Werte des Kathodenstromes J_K die Hilfsströme J_H gegen die Hilfsschpannungen V_H aufgetragen. Jede dieser Kurven

stellt also eine Art Sondencharakteristik der Hilfselektrode dar. Will man diese Kurven als Charakteristik auffassen, so nimmt man allerdings an, daß der Zustand des sondierten „Plasmas“ bei konstant

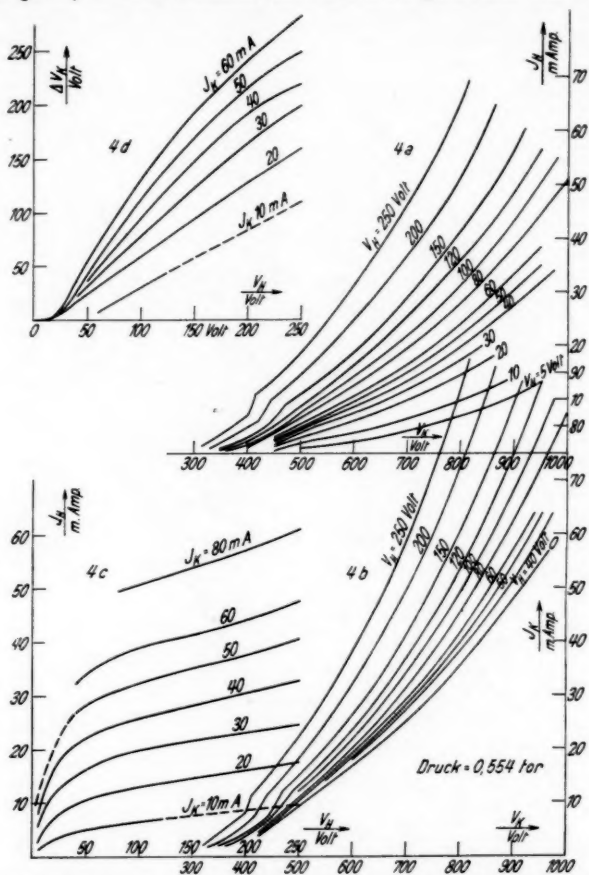


Fig. 4. Zusammenhang von Brennspannung (V_K), Hilfsspannung (V_H), Kathodenstrom (J_K), Hilfsstrom (J_H), beim Druck von 0,554 tor

gehaltenem Kathodenstrom von V_H oder J_H nicht abhängen. Man unterstellt also, daß das Plasma ausschließlich in seinem Zustand vom Kathodenstrom bestimmt sei. Diese Annahme erscheint zunächst wenig plausibel, da die Sonde dieselbe Größe hat wie die Kathode und dem Plasma einen Strom von fast derselben Größe entzieht, als der, der das Plasma erzeugt. Es würde vielmehr

plausibel erscheinen, wenn der Plasmazustand von der Sonde sehr stark abhinge, d. h. wir würden erwarten, daß eine starke Rückwirkung von der Sonde auf das Plasma stattfindet. Diese Rück-

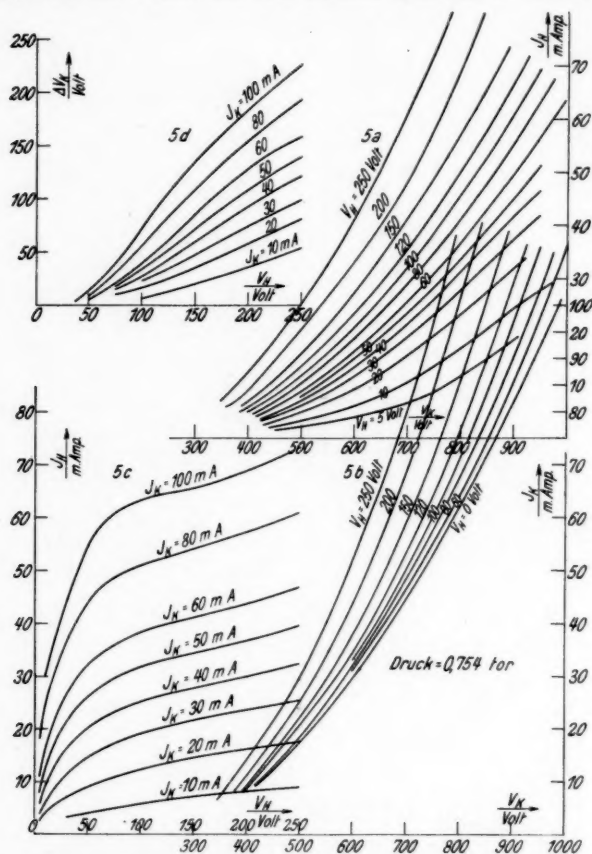


Fig. 5. Zusammenhang von Brennspannung (V_K), Hilfsspannung (V_H), Kathodenstrom (J_K), Hilfsstrom (J_H), beim Druck von 0,754 torr

wirkung müßte sich unter anderem darin zeigen, daß die Brennspannung der Entladung bei festgehaltenem Kathodenstrom sich ändert.

Man könnte auch unterstellen, daß der Zustand des „Plasma“ ausschließlich durch die Brennspannung bestimmt sei und entsprechende Sondencharakteristiken für festgehaltene Werte der

Brennspannung zeichnen. Von vornherein scheinen die Sondencharakteristiken bei festem Kathodenstrom vor den bei fester Brennspannung keinen Vorzug zu genießen. Wenn man überhaupt den

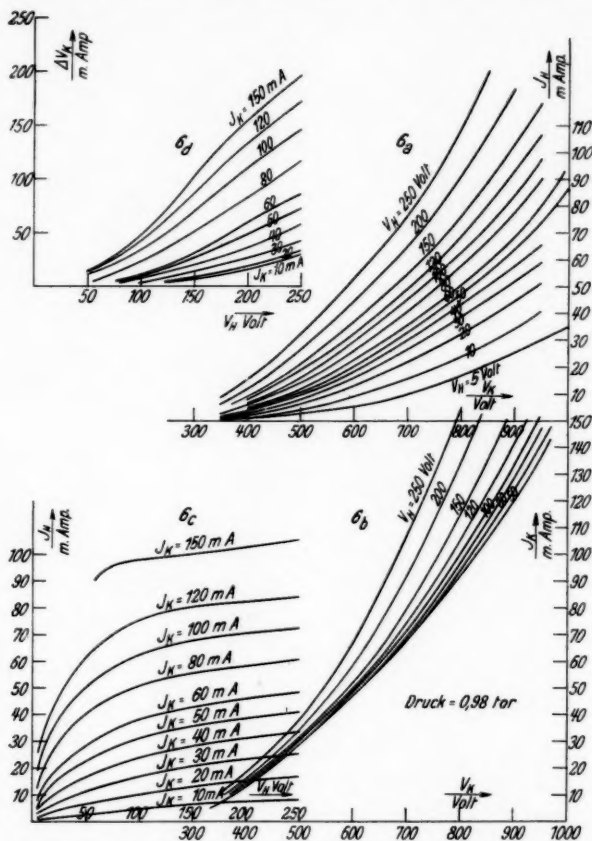


Fig. 6. Zusammenhang von Brennspannung (V_K), Hilfsspannung (V_H), Kathodenstrom (J_K), Hilfsstrom (J_H), beim Druck von 0,98 tor

Versuch unternehmen will, die Hilfselektrode als Sonde zu benutzen, so muß man Klarheit darüber schaffen, in welchem Verhältnis die beiden eben erwähnten Sondencharakteristiken zueinander stehen. Dies möge an der Charakteristik für 80 mA Kathodenstrom bei 0,98 tor auseinandergesetzt werden. Für V_H gleich Null gehört zu diesem Kathodenstrom die Brennspannung von 755 Volt. Für 50 Volt

Hilfsspannung gehört zu diesem Wert von J_K eine Brennschpannung die kaum 5 Volt niedriger ist, an der Hilfselektrode beobachtet man aber bereits einen Sondenstrom von 40 mA. Bei $V_H = 75$ Volt hat sich die Brennschpannung um 10 bis 15 Volt erniedrigt, der

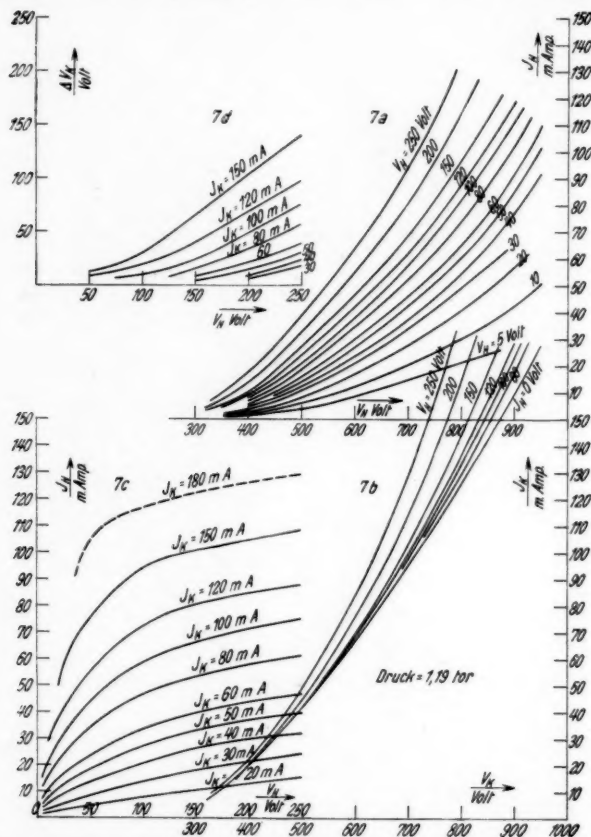


Fig. 7. Zusammenhang von Brennschpannung (V_K), Hilfsspannung (V_H), Kathodenstrom (J_K), Hilfsstrom (J_H), beim Druck von 1,19 tor

Sondenstrom ist auf 46 mA gestiegen, sogar bei 100 Volt Hilfsspannung beträgt die Senkung der Brennschpannung erst 20 bis 25 Volt, während der Sondenstrom schon 51 mA und damit schon 60% des Kathodenstroms erreicht. Bei anderen Kathodenströmen und anderen Drucken sind die Verhältnisse ganz ähnlich. Man kann dies leicht an den Figg. 3 bis 9 verfolgen. Kurz gesagt sind für nicht zu

große Sondenspannungen die Sondencharakteristiken im wesentlichen dieselben, gleichgültig ob man sie für konstanten Kathodenstrom J_K oder konstante Brennspannung V_K aufnimmt. Der Zusammenhang zwischen Kathodenstrom und Brennspannung wird eben durch die Stromentnahme an der Hilfelektrode nur wenig gestört. Wir schließen daraus, daß die Rückwirkung der Sonde wenigstens auf

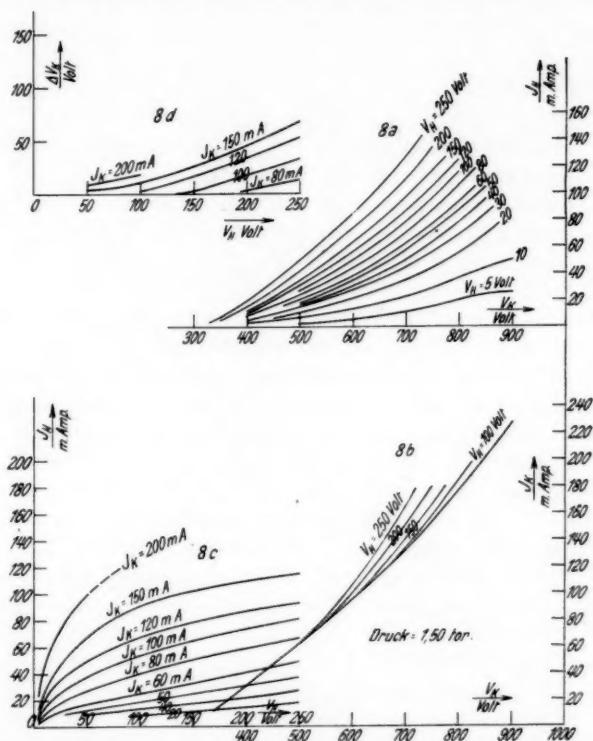


Fig. 8. Zusammenhang von Brennspannung (V_K), Hilfsspannung (V_H), Kathodenstrom (J_K), Hilfsstrom (J_H), beim Druck von 1,50 torr

den Teil des Plasmas, der für diesen Zusammenhang maßgebend ist, erstaunlich klein ist. Diese eigentümliche Tatsache werden wir später zu erklären haben. Um über eben diese Rückwirkungen einen Überblick zu schaffen, ist in den Figg. 3d bis 9d links oben die Erniedrigung der Brennspannung ΔV_K bei festgehaltenem Kathodenstrom J_K für die verschiedenen Hilfsspannungen V_H aufgetragen. Diese Erniedrigung hängt sehr erheblich vom Druck und

von der Größe des Kathodenstromes ab. Beim höchsten Druck von 2,00 tor sind Rückwirkungen über 10 Volt selbst bei 250 Volt Hilfsspannung und 150 mA Kathodenstrom nicht zu beobachten, obwohl an der Hilfselektrode Ströme über 110 mA auftreten. Bei 0,554 tor erreicht man 10 Volt Rückwirkung schon bei $J_K = 50$ mA und $V_H = 25$ Volt, allerdings ist auch der Sondenstrom hier schon etwa

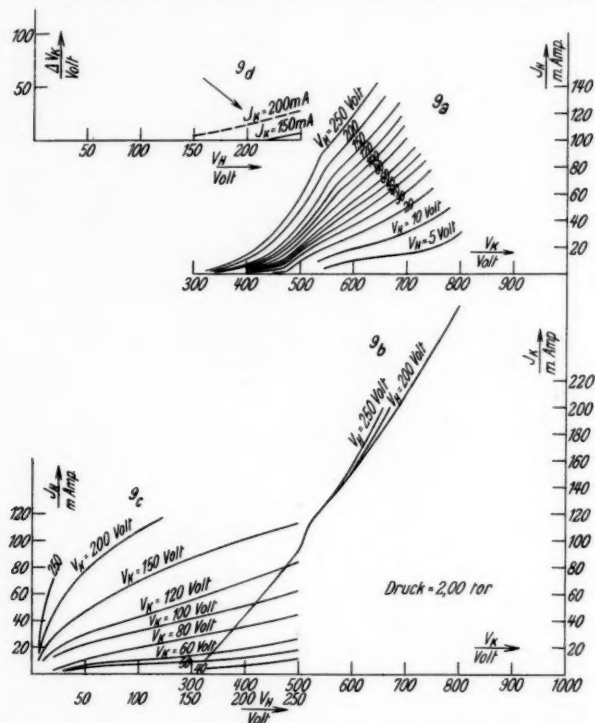


Fig. 9. Zusammenhang von Brennspannung (V_K), Hilfsspannung (V_H), Kathodenstrom (J_K), Hilfestrom (J_H), beim Druck von 2,00 tor

23 mA, beträgt also bereits 46 % des Kathodenstroms. Bei dem kleinsten Druck von 0,422 tor treten Rückwirkungen fast immer auf. Auch hierauf kommen wir später zurück, wenn wir die Ursache der Rückwirkungen aufklären werden.

Vernachlässigt man Rückwirkungen von weniger als 10 Volt (beinahe an der Grenze der Meßgenauigkeit), so findet man, daß der Sondenstrom ohne wesentliche Rückwirkung auf 50 % des Kathodenstromes und mehr gebracht werden kann. In diesem rückwirkungs-

freien Gebiet hat es sicher Sinn, die Stromspannungskurven der Hilfselektrode der Sondencharakteristiken zu diskutieren.

Wir versuchen jetzt einen Teil der Beobachtungen zu deuten. Wenn die Hilfselektrode allein Anode ist und an ihr der Anodenstrom $J_A = J_K$ beobachtet wird, so ist J_A , vorsichtig ausgedrückt, die Differenz der zur Hilfselektrode fließenden Elektronen- und Ionenströme. Wird die Hilfselektrode abgeschaltet, dafür aber die Zylinderanode angeschlossen, so ist jetzt J_A die Differenz der dort ankommenden Elektronen- und Ionenströme. An der Hilfselektrode hingegen ist der Elektronen- und Ionenstrom nunmehr gleich groß. Daraus, daß diese Umschaltung nur eine winzige Hilfsspannung von etwa 1 bis 2 Volt erfordert und daß Kathodenstrom und Brenns spannung nicht beeinflußt werden, müssen wir schließen, daß die Verlagerung des Elektronenstroms zu einer anderen Elektrode kaum andere Feldverhältnisse im Entladungsraum erfordert oder erzeugt. Die Elektronen folgen eben sehr leicht den geringsten Feldänderungen. Legen wir jetzt an die Hilfselektrode eine kleine Hilfsspannung (bei 0,98 tor und 80 mA Brenns spannung etwa 10 Volt) so beobachten wir einen Hilfsstrom J_H (nämlich 20 mA), den wir vorsichtig als Differenz der zur Hilfselektrode abfließenden Ionen- und Elektronenströme ansprechen müssen. Da durch das Anlegen dieser Hilfsspannung aber weder Brenns spannung noch Kathodenstrom geändert werden, müssen wir notwendig schließen, daß auch schon ohne Hilfsspannung ein Ionenstrom von mindestens der Größe J_H zur Hilfselektrode geflossen war. Es war nämlich ganz unverständlich, daß eine Erhöhung des Trägerverlustes des Plasmas um 25% ohne Rückwirkung auf den Kathodenstrom und die Brenns spannung blieben. *Wir kommen also zu der Auffassung, daß zur Hilfselektrode ein ganz bedeutender Ionenstrom fließt, sowohl wenn sie abgeschaltet, wie auch wenn sie mit der Zylinderanode zusammen oder allein als Anode geschaltet ist.* Seine genaue Größe kennen wir zwar nicht, dürfen ihn aber auf größenordnungsmäßig 25 bis 50% des Kathodenstromes schätzen. Der gesamte zur Hilfselektrode als alleiniger Anode fließende Elektronenstrom wäre dann 125 bis 150% des gemessenen Anodenstroms.

Legt man eine kleine negative Hilfsspannung an, so geschieht nichts, als daß die Elektronen zum Teil von der Hilfselektrode vertrieben werden und daß dadurch der Elektronen- und Ionenstrom getrennt zur Messung gelangt. Da es sich nur um eine Verlagerung der Bewegung der leichtbeweglichen Elektronen handelt, bleibt dieser Eingriff ohne Einfluß auf die Feldverhältnisse, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung der Hilfselektrode. Direkt vor dieser

entsteht natürlich eine schmale Schicht erhöhter positiver Raumladung, da aus dieser Schicht die Elektronen teilweise entfernt werden. Hierauf kommen wir weiter unten wieder zurück.

Die Größenverhältnisse des Ionen- und Elektronenstroms an einer im Glimmlicht stehenden Anode führen uns aber noch zu weiteren Folgerungen. Wir stellten fest, daß bei 0,98 tor und 80 mA Kathodenstrom bei der Hilfsspannung 10 Volt zur Hilfelektrode ein Ionenstrom 20 mA zuzüglich des durch den noch verbleibenden Elektronenstrom kompensierten Ionenstroms fließt. Derselbe Ionenstrom fließt aber zur Hilfelektrode, wenn sie allein als Anode geschaltet ist, wie wir soeben überlegt haben. Der gesamte Elektronenstrom an dieser Anode beträgt also 100 mA zuzüglich des einen Teil des Ionenstroms kompensierenden Elektronenstroms. Das Verhältnis des dieser Anode gelangenden Elektronenstroms zum Ionenstrom ist also 5 : 1 oder kleiner.

Seien nun n_e und n_i die Elektronen- bzw. Ionendichten, v_e und v_i die zugehörigen Geschwindigkeiten so ist also

$$\frac{n_e v_e}{n_i v_i} < 5$$

oder quadriert.

$$\frac{n_e^2 v_e^2}{n_i^2 v_i^2} < 25.$$

Nehmen wir an, daß die Ionen H^+ -Ionen sind und multiplizieren wir die Ungleichung mit dem Verhältnis der Massen $m_e : m_i = 1 : 1835$ so erhalten wir

$$\frac{n_e^2 m_e v_e^2}{n_i^2 m_i v_i^2} = \frac{n_e^2 E_e}{n_i^2 E_i} < \frac{25}{1835}$$

worin E_e bzw. E_i die mittleren kinetischen Energien eines Elektrons bzw. Ions bedeuten. Es ist also

$$\frac{n_e}{n_i} < 0,117 \sqrt{\frac{E_i}{E_e}}.$$

Nun ist die mittlere Elektronenenergie beträchtlich größer als die Ionenenergie und es müßte daher die Ionendichte etwa das 10- bis 20-fache der Elektronendichte betragen. Legen wir, was durchaus zulässig erscheint, noch etwas höhere Hilfsspannungen zugrunde, so kommen wir zu noch höheren relativen Ionendichten. Da solche Ionendichten aber höchst unwahrscheinlich sind, muß also eine der Voraussetzungen unserer Rechnung falsch sein. Die Schwierigkeit liegt darin, daß die Ionenströme gegenüber den Elektronenströmen (die ja gleich Kathodenstrom + Hilfsstrom sind) unwahrscheinlich hoch sind. Dies war ja schon die auffälligste Feststellung beim Betrachten der Figg. 3 bis 9. Der Schwierigkeit entgehen wir nur durch die Annahme, daß auch an die Anode viel mehr Elektronen

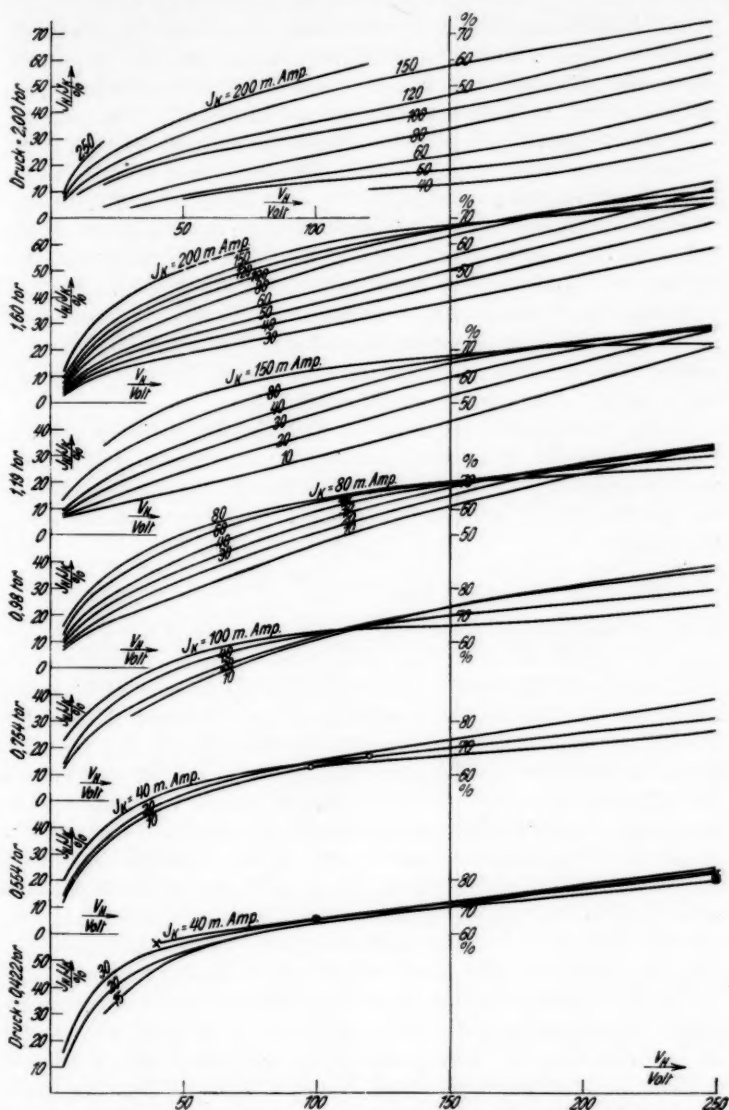


Fig. 10. Sondencharakteristiken bei verschiedenen Stromstärken und Drucken gelangen würden, wenn sie nicht durch ein Gegenfeld von ihr ferngehalten werden würden.

Wir sind also jetzt zu der Vorstellung gekommen, daß eine im negativen Glimmlicht stehende Elektrode, selbst wenn sie Anode ist, gegen das Glimmlicht ein deutlich negatives Potential besitzt. Dies hat zur Folge, daß nur die schnelleren Elektronen zu ihr gelangen.

Wir versuchen jetzt aus den Messungen zu entnehmen, wie die Höhe des negativen Gegenpotentials der Anode von Kathodenstrom und Druck abhängt. Zu diesem Zweck ist in den Fig. 10 das Verhältnis Hilfsstrom zu Kathodenstrom ($J_H : J_K$) bei konstant gehaltenem J_K gegen V_H aufgetragen. Je höher dies Verhältnis bei kleiner Hilfsspannung ist, desto größer ist das Mißverhältnis von Ionen- und Elektronenstrom, desto höher muß also das Gegenpotential an der Anode sein. Offenbar wächst das Gegenpotential mit steigendem Kathodenstrom und sinkt mit wachsendem Druck. Schätzungsweise beträgt die Gegenspannung einige Volt.

Wie kommt aber das negative Potential der Anode gegen das Plasma zustande? Wir denken uns ein Plasma, welches nicht neutral zu sein braucht, sondern überall mit einer überschüssigen positiven Raumladungsdichte versehen sein kann. Nach der Poissonschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \frac{4\pi e}{s}$$

bestimmt die Raumladungsdichte ρ das Feld, dessen Verlauf etwa der Fig. 11 entspreche. Stellen wir an der Stelle $x = d$ (gestrichelte Linie) eine metallische Fläche auf, so treffen auf diese viel mehr Elektronen als Ionen, die alle an ihr vernichtet werden. Es muß also in der Umgebung eine Elektronenverarmung eintreten, und mit ihr eine starke Erhöhung der positiven Raumladung. Dieser Vorgang hat primär gar nichts damit zu tun, daß die Fläche isoliert oder Anode sein kann. Die erhöhte positive Raumladung verursacht ein scharfes Abbiegen der Potentialkurve nach unten. In den meisten Fällen entsteht sogar ein Gegenfeld, welches nun seinerseits dem Elektronenabfluß mit seinen Folgen entgegenwirkt, solange bis Gleichgewicht eintritt. Bei einer isolierten Elektrode besteht dann Gleichgewicht, wenn die Zahl der auftretenden Ionen gleich der der Elektronen ist. Ist die im Plasma stehende Elektrode Anode, so bildet sich ein derartiges Gegenfeld aus, daß die Zahl der auftreffenden Elektronen die der auftreffenden Ionen gerade um so viel übersteigt, als Ionen von der Kathode aus dem Plasma gezogen werden. Sind die Elektronen sehr schnell, so ist ein hohes Gegenpotential nötig, um sie fernzuhalten. Die Höhe des Gegenpotentials wird also wie die der Elektronentemperatur mit wachsendem Kathodenstrom und fallendem Druck steigen.

Jetzt diskutieren wir den mutmaßlichen Potentialverlauf nach Anlegen der Hilfsspannung. Das Potentialmaximum im Plasma wird im wesentlichen mit der Zylinderanode gemessen. Das Anodenpotential ist zwar auch hier aus den oben geschilderten Gründen mit dem Potentialmaximum nicht ganz identisch. Da die Zylinderanode aber weniger tief im Glimmlicht steht als die Hilfselektrode herrscht dort ein geringeres Gegenpotential, welches wir für die weiteren Betrachtungen, bei denen es sich um höhere Potentialdifferenzen handelt, vernachlässigen können. Ohne Hilfselektrode nehmen wir ein in der Richtung von der Kathode weg mäßig ansteigendes Potential an. Setzt man eine Anode oder isolierte Elektrode in das Glimmlicht, so bildet sich ein flaches Maximum aus, mit einem kurzen und nicht

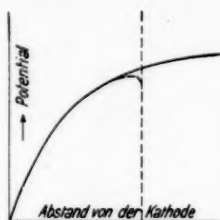


Fig. 11.

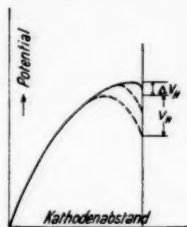


Fig. 12.

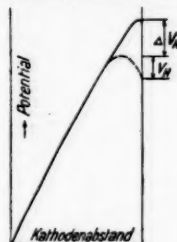


Fig. 13.

Mutmaßlicher Potentialverlauf zwischen Kathode und Hilfselektrode

tiefen Abfall zur Anode hin. Wir vervollständigen jetzt die Fig. 11 (vgl. Fig. 12). Legt man eine Hilfsspannung v_H an, so wird das Gebiet aus dem die Elektronen vertrieben werden größer, die erhöhte positive Raumladung ausgedehnter, die Potentialkurve biegt früher und stärker nach unten. Man sieht aus der Figur, daß man ein ganz erhebliches Absinken des Potentials der Hilfselektrode unter das Potentialmaximum erzielen kann, ohne das letzteres selbst sich beträchtlich senkt. Dies erklärt, daß die Brennspannungen durch das Anlegen kleiner Hilfsspannungen nicht wesentlich geändert werden. Ebenfalls ungeändert bleibt der ganze Feldverlauf auf der kathodischen Seite des Plasmas. Wird die Hilfsspannung weiter vergrößert, so wird allmählich auch das Potentialmaximum niedriger und hierin sehen wir die in den Figg. 3—9 beschriebenen Rückwirkungen der Sonde auf die Brennspannungen. Auch hierbei bleibt der kathodische Teil des Plasmas fast unbeeinflusst. Durch die Abnahme von Ionenstrom an der Hilfselektrode, bzw. das Anlegen der negativen Hilfsspannungen wird also primär nicht der Kathodenstrom verstärkt oder die Zahl der Ionen im Plasma vergrößert, sondern es wird die Brennspannung erniedrigt, da das Potentialmaximum gewissermaßen abgeholt wird.

Aus Fig. 12 erkennt man leicht, daß die Rückwirkungen Δv_k um so geringer sein müssen, je flacher die Potentialkurve verlaufen würde, wenn die Hilfselektrode gar nicht vorhanden wäre. Aus den Figg. 3—9 sehen wir, daß bei festgehaltener Hilfsspannung die Rückwirkung größer wird, wenn der Kathodenstrom wächst und der Druck sinkt. Wir schließen daraus, daß die Potentialkurven, wenn keine Hilfselektrode vorhanden wäre, bei hohem Druck sich verflacht und mit wachsendem Kathodenstrom steiler wird. Da mit dem Kathodenstrom auch die Brennspannung wächst, ist letzteres selbstverständlich. Daß mit wachsendem Druck die Potentialkurven sich verflachen, leuchtet ebenfalls ein, da sich das Glimmlicht bei höherem Druck allmählich von der Hilfselektrode zurückzieht. Besonders interessant sind die Rückwirkungen bei den niedrigsten Drucken. Das rückwirkungsfreie Gebiet der Hilfsspannung ist hier sehr klein und die Rückwirkung kann unter Umständen sogar größer als die Hilfsspannung werden. Dies tritt bei den Drucken von 0,422 und 0,544 tor wirklich ein. Es rührt dies daher, daß hier die Potentialkurven sehr steil sind und deshalb beim Umbiegen nach unten doch noch ein Stück ansteigen um erst später abzufallen (vgl. Fig. 13).

Hier erhebt sich eine weitere Frage. Was würde passieren, wenn die Hilfselektrode bei festgehaltenem Druck und Kathodenstrom entfernt würde? Die Vernichtung von Elektronen an der Stelle wo sich die Elektrode befand, würde entfallen. Es würde also hier auch keine Elektronenverarmung, keine erhöhte positive Raumladung und kein Abbiegen der Potentialkurve nach unten stattfinden. Das Potential würde weiter langsam ansteigen und die Brennspannungen müßten sich erhöhen. Dieser Effekt müßte auftreten, nicht nur wenn die Hilfselektrode alleinige Anode oder zusammen mit der Zylinderanode Anode wäre, sondern auch wenn sie isoliert ist, oder sich auf negativem Potential befindet. Daß das Annähern der Anode in Wasserstoff (auch bei einigen anderen Gasen) die Brennspannung senkt, hat Güntherschulze gezeigt¹⁾. Daß das Annähern einer stromlosen Elektrode oder negativen Sonde tatsächlich dieselbe Wirkung hervorbringt, geht aus Untersuchungen in unserem Institut hervor, die noch nicht abgeschlossen sind, und über die hier noch nicht ausführlich berichtet werden soll.

Die Hohlkathode

Erhöhen wir die Hilfsspannung weiter, so beginnt natürlich eine gewisse Erzeugung von Sekundärelektronen durch die auftreffenden Träger. Dieser Effekt ist wohl auch bei den bisher betrachteten Hilfs-

1) A. Güntherschulze, Ztschr. f. Physik 61. S. 1. 1930; 61. S. 581. 1930.

spannungen vorhanden und führt zu einer Stromerhöhung. Wie groß die Wirkung dieses Vorganges ist neben der immer weiter fortschreitenden Abtragung des Potentialmaximums, oder, wenn man auf gleiche Brennspannungen bezieht, der hierdurch bewirkten bedeutenden Stromerhöhung, soll durch weitere Versuche ermittelt werden. In der Erniedrigung des Plasmapotentials möchten wir auch die Wirkung der Hohlkathode sehen, weniger in dem Hinundherpendeln von Elektronen im Feld oder in dem Bombardement der Kathodenoberfläche durch die von der gegenüberliegenden Fläche ausgesandten Elektronen.

Rogowskis Theorie

Wie verhalten sich nun unsere Experimente zur Rogowskischen Theorie? Hier muß man sich vor voreiligen Schlüssen hüten. Die von uns untersuchten Erscheinungen beruhen zwar im wesentlichen auf der Diffusion und sind als solche in der Rogowskischen Theorie nicht enthalten. Die Hilfsströme sind keineswegs geringfügig, sondern von fast gleicher Größenordnung wie die Kathodenströme. Daß wir die Plasmavorstellung in den Vordergrund gestellt haben, die ja auch die Beobachtungen gut deutet, zeigt, daß wir unsere Beobachtungen nicht in Zusammenhang mit dieser Theorie bringen wollen. Trotzdem wäre es verfehlt, aus unseren Messungen zu schließen, daß in der gewöhnlichen Glimmentladung die Diffusion eine so große Rolle spiele, daß die Anwendung der Rogowskischen Theorie unzulässig wäre. Die von uns untersuchten Diffusionsvorgänge werden nämlich gerade erst dadurch in Gang gesetzt, daß in das Plasma des Glimmlichts eine Metallfläche eingebracht wird, an der auftreffende Träger vernichtet werden. An der Metallfläche selbst herrscht die Trägerkonzentration Null und erst hierdurch wird das Konzentrationsgefälle geschaffen, das die Voraussetzung der Ionen- und Elektronendiffusion ist.

Die Entladung die wir vor uns haben, muß in allen Fällen als eine *behinderte* Entladung bezeichnet werden, nur muß der Begriff der Behinderung erheblich ausgedehnt werden. Behinderung tritt nicht nur durch die Anode, sondern auch durch Elektroden in anderer Schaltung auf. Die „Behinderung“ kann auch in Wirklichkeit eine Förderung sein und dies ist bei unseren Entladungen stets der Fall. Die Förderung rührt daher, daß das Vorhandensein der Elektrode die Ausbildung des normalen Potentialanstieges behindert und hierdurch die Brennspannung senkt. *Der Mechanismus der Behinderung in dem Druckabstandsgebiet, wo sich die Behinderung in einer Erniedrigung der Brennspannung auswirkt, erscheint durch unsere Untersuchungen aufgeklärt. Eine wichtige weitere Feststellung scheint ferner zu sein,*

daß lange nicht das ganze Raumladungs- und Feldgebiet des negativen Glimmlichts für die Entladung wichtig ist, sondern daß nur der kathodische Teil des Glimmlichts für den Strom maßgebend ist. Mit der Rogowskischen Theorie können diese Vorgänge der behinderten Entladung nicht erfaßt werden.

Ganz etwas anderes ist es natürlich mit der völlig unbehinderten Entladung. Ob zu ihrer Behandlung die Grundlagen der Rogowskischen Theorie ausreichen, wollen wir hier nicht diskutieren. Wir wollen diese Frage noch zurückstellen, bis uns größeres Beobachtungsmaterial zur Verfügung steht.

Der Helmholtzgesellschaft, der Karlsruher Hochschulvereinigung und der I. G. Farbenindustrie, die die Ausführung dieser Untersuchungen unterstützt haben, möchten wir auch hier unseren Dank aussprechen.

Karlsruhe, Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 19. Juli 1935)

**Die Wirbelströme in einer Kreislochplatte
im Felde eines koaxialen Einzelleiters**

Von Herbert Buchholz

(Mit 5 Figuren)

1. Die Stellung der Aufgabe und einige vorbereitende Betrachtungen

Im Hinblick auf einige häufige Ausführungsformen technischer Apparate sollen im folgenden die Wirbelströme und ihre Energieverluste in einem leitenden Hohlzylinder von endlicher Höhe berechnet werden, in dessen Achse ein von Wechselstrom durchflossener, sehr langer, geradliniger Leiter verläuft. Bei den Leiteranordnungen, auf die damit abgezielt wird, hat die Rückleitung auf die Ausbildung der Wirbelströme keinerlei Einfluß, weil sie entweder sehr weit entfernt oder selbst koaxial geführt ist. Ist die Höhe des Zylinders klein gegenüber der Wandstärke, so kann der Zylinder anschaulicher als Kreislochplatte bezeichnet werden. Im umgekehrten Falle liegt eine Hülse vor. Im späteren Text wird wegen der größeren Anschaulichkeit vorwiegend von der Kreislochplatte statt von dem Hohlzylinder gesprochen werden. Eine Beschränkung der Allgemeinheit soll in dieser Bezeichnung nicht zum Ausdruck kommen.

Die damit umrissene Aufgabe ist eine Verallgemeinerung eines erstmalig von P. Debye¹⁾ behandelten Wirbelstromproblems. In der Tat kann dieses Problem durch einen einfachen Grenzübergang aus dem vorliegenden entwickelt werden. Zu diesem Zweck lassen wir in Gedanken den mittleren Radius der Kreislochplatte in der Weise über alle Grenzen wachsen, daß dabei die radiale Dicke der Platte stets die gleiche bleibt. Das magnetische Feld in der Nachbarschaft der Platte nimmt dann bei zunächst unveränderlicher Größe des Stroms im umgekehrten Verhältnis zum mittleren Radius der Platte ab. Wird aber der Strom im Einzelleiter in demselben Maße wie dieser Radius gesteigert, so behält das Magnetfeld im Bereiche der Platte einen endlichen, von Null verschiedenen Wert und geht dabei gleichzeitig mehr und mehr in ein gleichförmiges Feld über. Schließ-

1) S. P. Debye, Wirbelströme in Stäben von rechteckigem Querschnitt, Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 54. S. 418—437. 1907 und M. J. O. Strutt, Stromverdrängung in rechteckigen Leitern, Ann. d. Phys. 83. S. 989—1000. 1927.

lich entsteht bei unbeschränkter Vergrößerung von Plattenradius und Strom aus der Lochscheibe ein unendlich langer Stab mit rechteckigem Querschnitt, der in einem zu seiner Achse parallelen und homogenen Felde steht. Das ist aber gerade die Anordnung, die dem von Debye behandelten Problem zugrunde liegt.

Die Verwandtschaft zwischen dem Problem des rechteckigen Stabes und der Kreislochplatte zeigt sich noch in anderer Weise. Bei der Kreislochplatte sind die Kraftlinien des erregenden Feldes wegen des vernachlässigbaren Einflusses der Rückleitung jedenfalls koaxiale Kreise. Die Wirbelströmung besteht daher wegen der axialen Symmetrie der Platte aus in sich geschlossenen, eben ausgebreiteten Stromfäden, die in allen rechteckigen Meridianschnitten der Scheibe in der gleichen Weise verlaufen. Ein solches axialsymmetrisches Ringsystem von Stromfäden besitzt aber nach dem Beispiel der Kreisringspule nur innerhalb des Ringsystems selbst ein eigenes, nicht verschwindendes Feld. Das magnetische Feld des stromdurchflossenen Einzelleiters wird daher durch eine axial zu ihm angeordnete Kreislochplatte außerhalb dieser Platte bis an alle ihre Grenzflächen heran in gar keiner Weise verändert. Das gleiche gilt für den unendlich langen, rechteckigen Stab in einem homogenen und zu seiner Achse parallelen Felde, da sich hier das System der Wirbelstromfäden bei der Erzeugung eines eigenen magnetischen Feldes wie eine unendlich lange, gleichmäßig bewickelte Zylinder-spule verhält.

Die im folgenden für eine einzelne Kreislochplatte aufgestellte Lösung bleibt daher auch dann noch richtig, wenn außer dieser einen Platte noch eine beliebige Zahl anderer koaxial angeordneter Platten vorhanden ist, die mit oder ohne Abstand, dann aber isoliert, nebeneinander liegen. Dabei können die Platten sogar verschiedene Größe und Dicke haben.

2. Erläuterung der Zeichen und die mathematische Formulierung der Aufgabe

Der besseren Übersichtlichkeit wegen möge zunächst eine Zusammenstellung der in dieser Arbeit verwendeten mathematischen Zeichen gebracht werden. Es bedeuten

$J \cdot e^{-i\omega t}$	das Zeitgesetz für die Stromstärke des den Einzelleiter durchfließenden Wechselstroms in A mit $i = \sqrt{-1}$;
$\omega = 2\pi f$	die Kreisfrequenz in s^{-1} und die Periodenzahl in Hz;
μ, σ	die relative Permeabilität und die elektrische Leitfähigkeit des Materials der Kreislochplatte in S/cm;
$\Pi = 4\pi \cdot 10^{-9}$	ein benannter Zahlenfaktor mit der Dimension H/cm;

- $\kappa = \sqrt{\omega \Pi \mu \sigma}$ das reziproke Eindringmaß in 1/cm für das Plattenmaterial;
 r, φ, z die Zylinderkoordination eines Aufpunktes;
 $2d$ die axiale Dicke der Platte in cm;
 b, a der äußere und der innere Radius der Platte in cm;
 $R - i\omega L$ der äußere komplexe Scheinwiderstand des Einzelleiters in Ohm als Maß für die Energieverluste in der Platte.

Die Kreislochplatte werde gemäß Fig. 1 zu dem Zylinderkoordinatensystem der r, φ, z orientiert. Die magnetische Feldstärke besitzt dann nur die Komponente \mathfrak{H}_φ , die obendrein von φ unabhängig ist. Aus den Gleichungen des quasi-stationären Feldes ergibt sich in bekannter Weise für die Feldstärke \mathfrak{H}_φ im Innern der Scheibe die folgende Differentialgleichung:

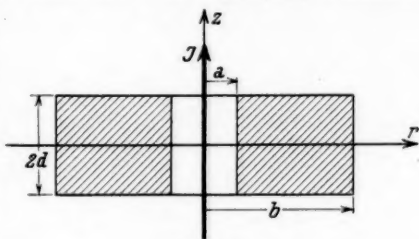


Fig. 1

$$(1) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} + i\kappa^2 \right\} \mathfrak{H}_\varphi = 0.$$

Dahinzu kommen nach dem eingangs Gesagten für \mathfrak{H}_φ die Grenzbedingungen:

$$(2a) \quad \mathfrak{H}_\varphi = J/2\pi a \left(\begin{array}{l} r=a \\ |z| \leq d \end{array} \right),$$

$$(2b) \quad \mathfrak{H}_\varphi = J/2\pi b \left(\begin{array}{l} r=b \\ |z| \leq d \end{array} \right),$$

$$(2c) \quad \mathfrak{H}_\varphi = J/2\pi r \left(\begin{array}{l} z=\pm d \\ a \leq r \leq b \end{array} \right).$$

Durch die Gl. (1) und (2) ist \mathfrak{H}_φ bereits eindeutig bestimmt.

Die *Strömung* in der Scheibe hat lediglich eine r - und eine z -Komponente. Beide Komponenten lassen sich mittels \mathfrak{H}_φ nach den Gleichungen

$$(3a) \quad i_r(r, z) = - \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial z},$$

$$(3b) \quad i_z(r, z) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \mathfrak{H}_\varphi).$$

berechnen. Die Energieverluste wiederum sind aus der Stromdichte berechenbar. Die Lösung der ganzen Aufgabe kommt danach im wesentlichen auf die Integration der Gl. (1) hinaus bei gleichzeitiger Berücksichtigung der drei Grenzbedingungen (2a)...(2c).

3. Das komplexe Lösungsintegral für \mathfrak{S}_φ

Die Integration dieser beiden Gleichungssysteme geschehe mit Hilfe komplexer Integrale, die in für sie charakteristischer Weise über zwei ins Unendliche auslaufende und zu einer der beiden Zahlenachsen symmetrische Wege erstreckt werden¹⁾. Eine schrittweise Herleitung der Lösung würde im vorliegenden Falle zu weit-schweifig werden. Aus diesem Grunde soll das lösende komplexe Integral ohne weitere Zwischenrechnungen angeschrieben werden. Erst später wird ein Hinweis darauf erfolgen, wie der Aufbau dieses Integrals im vorliegenden Falle erschlossen worden ist.

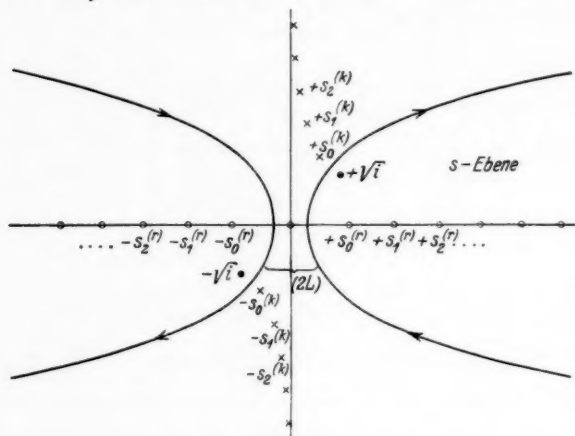


Fig. 2

Bedeutet $(2L)$ den in Fig. 2 eingezeichneten Integrationsweg in der komplexen s -Ebene, so wird das Gleichungssystem (2.1) und (2.2) durch die folgende Beziehung für \mathfrak{S}_φ befriedigt:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_\varphi(r, z) &= -i \cdot \frac{J}{2\pi \cdot a \cdot b} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2L)} \frac{\mathfrak{G}(\alpha z \sqrt{s^2 - i})}{\mathfrak{G}(\alpha d \sqrt{s^2 - i})} \cdot \frac{a \cdot f(\alpha s; a, r) + b \cdot f(\alpha s; r, b)}{f(\alpha s; a, b)} \cdot \frac{ds}{s \cdot (s^2 - i)} \end{aligned} \right.$$

1) Wegen der erstmaligen Anwendung dieser Methode auf die Lösung der Laplaceschen Gleichung bei einfachen Randbedingungen vgl. man die Arbeit von I. T. Bromwich, Proc. London. Math. Soc., 2. Ser., Vol. 30. S. 165 bis 177. 1930. Wegen ihrer Anwendung auf schwierigere Fälle vgl. die Arbeiten des Verfassers in Arch. f. Elektr., 28. S. 122–130. 1934 und in der Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 14. S. 285–294. 1934. Die Voraussetzung der symmetrischen Anordnung der beiden Wegghälften ist übrigens keine notwendige.

Hierin steht $f(\pi s; a, b)$ zur Abkürzung für die durch (2) definierte Funktion¹⁾. Für spätere Zwecke sind eine Reihe von Eigenschaften

$$(2) \quad f(\lambda; a, b) = Y_1(a\lambda) \cdot J_1(b\lambda) - Y_1(b\lambda) \cdot J_1(a\lambda)$$

dieser Funktion in den nachstehenden Gleichungen zusammengestellt:

$$(2a) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) f(\lambda; a, r) = -\lambda^2 \cdot f(\lambda; a, r),$$

$$(2b) \quad f(\lambda; a, b) = -f(\lambda; b, a),$$

$$(2c) \quad f(\lambda; a, a + \varepsilon) \rightarrow -\varepsilon \cdot \frac{2}{\pi a} (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$(2d) \quad f(\lambda \cdot e^{m\pi i}; a, b) = f(\lambda; a, b) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2),$$

$$(2e) \quad f(0; a, b) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{(b^2 - a^2)}{ab},$$

$$(2f) \quad f(\lambda; a, b) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \cdot \lambda \cdot \sqrt{ab} \right)^{-1} \cdot \sin \lambda(a-b) \text{ für } b, a \rightarrow \infty \text{ oder } \lambda \rightarrow \infty.$$

$$(2g) \quad \begin{cases} f(\lambda; a, b) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \lambda b \right)^{-1/2} \cdot \left[Y_1(a\lambda) \cdot \cos \left(\lambda b - \frac{3\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - J_1(a\lambda) \cdot \sin \left(\lambda b - \frac{3\pi}{4} \right) \right] \quad (b \rightarrow \infty). \end{cases}$$

Um zeigen zu können, daß die Gl. (1) tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems (2.1) und (2.2) ist, muß zunächst einiges über die Pole des Integranden von (1) und über deren Lage zu dem Integrationsweg (2L) gesagt werden. Der Integrand von (1) besitzt

a) einen einfachen Pol im Nullpunkt der s -Ebene,

β) zwei einfache Pole in den Punkten $s = \pm \sqrt{i}$,

γ) eine unendliche Kette rein reeller und einfacher Pole in den Nullstellen der Gl. (3) in bezug auf s . Ist $+s_p^{(r)}$ mit $p = 0, 1, 2, \dots$

$$(3) \quad f(\pi s; a, b) = Y_1(a\pi s) \cdot J_1(b\pi s) - J_1(a\pi s) Y_1(b\pi s) = 0$$

ein solcher Pol, so ist wegen (2d) auch $-s_p^{(r)}$ ein Pol. Die Pole liegen daher symmetrisch zum Nullpunkt der s -Ebene. Eine genauere Angabe über die Lage der Pole kann zunächst entbehrt werden. Vor der Hand genügt die Feststellung, daß die absolut kleinste Nullstelle von (3) für jedes endliche πa und πb jedenfalls selbst endlich und wegen (2e) von Null verschieden ist.

δ) eine unendliche Kette komplexer, einfacher Pole in den

$$(4) \quad \operatorname{Coj}(\pi d \sqrt{s^2 - i}) = 0.$$

1) In der Bezeichnung der Zylinderfunktionen hält sich die vorliegende Arbeit an das Buch von G. N. Watson, *Treatise on the Theorie of Bessel-functions*, Cambridge, 1922.

Nullstellen der Gl. (4) in bezug auf s . Die Lage der Wurzeln von (4) läßt sich leicht ermitteln und ist aus den beiden Beziehungen (7a) und (7b) zu entnehmen:

$$(7a) \quad \pm s_p^{(k)} = (\cos \alpha_p)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}i(a_p + \frac{\pi}{2})},$$

$$(7b) \quad \operatorname{tg} \alpha_p = \frac{\pi^2}{x^2 d^2} \cdot \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (p = 0, 1, 2, \dots).$$

Auch diese Pole liegen demnach symmetrisch zum Nullpunkt der s -Ebene. Für $p = 0$ ist im allgemeinen $0 < \alpha_p < \frac{\pi}{2}$ und für $p \rightarrow \infty$ geht $\alpha_p \rightarrow \frac{\pi}{2}$ und damit auch $\operatorname{arc} s_p^{(k)} \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Mit wachsendem p nähern sich also die Wurzeln von (4) in der s -Ebene asymptotisch der Achse der rein imaginären Zahlen, wie das schematisch in Fig. 2 zum Ausdruck gebracht worden ist. Für die absolut kleinste Wurzel $s_0^{(k)}$ ist auf jeden Fall $|s_0^{(k)}| > 1$ und $\operatorname{arc} s_0^{(k)} > \frac{\pi}{4}$. Es ist daher für endliche Werte von x, a, b und d stets möglich, die beiden zur reellen und imaginären Zahlenachse symmetrischen Wegbestandteile von (2L) sowohl zwischen dem Nullpunkt und dem Pol $\pm s_0^{(r)}$ als auch zwischen den Polen $\pm \sqrt{i}$ und $\pm s_0^{(k)}$ hindurchzuführen.

Die eben angeführten vier Polgruppen bilden die einzigen, im Endlichen gelegenen Singularitäten des Integranden von (1) in bezug auf s , denn sowohl die Funktion $\operatorname{Coj}(x z \sqrt{s^2 - i})$ als auch die Funktion $f(xs; a, b)$ sind im Endlichen durchaus eindeutige Funktionen ohne Verzweigungsstellen endlicher oder unendlich hoher Ordnung. Für die Funktion Coj folgt dies aus ihrer Eigenschaft, eine gerade Funktion zu sein, für die Funktion f aus den Beziehungen (2d) und (2e). Im ganzen genommen ist der Integrand von (1) eine ungerade Funktion. Gemäß (2f) verhält er sich in den unendlich fernen Teilen des Integrationsweges so, daß selbst für $z = \pm d$ und $r = a$ oder b das zugehörige Integral noch absolut konvergent bleibt.

Die Existenz des Integrals in der Beziehung (1) ist damit gesichert. Es braucht mithin nur noch gezeigt zu werden, daß es tatsächlich die Gl. (2.1) und (2.2) befriedigt. Für die Differentialgleichung selbst ist diese Behauptung in Rücksicht auf (2a) fast evident. Für die vier Grenzbedingungen läßt sie sich auf die folgende Weise rechtfertigen.

Ist etwa $z = \pm d$, so wird der erste Bruch unter dem Integralzeichen von (1) der Eins identisch gleich. Der neue Integrand besitzt dadurch nicht mehr die Polgruppe δ . Wegen der absoluten Konvergenz des Integrals darf dann aber der Integrationsweg von (1)

an die imaginäre Zahlenachse herangelegt und schließlich auf einen Umlauf um den einfachen Pol $s = 0$ zusammengezogen werden. Die Anwendung des Residuensatzes führt damit für \mathfrak{H}_φ tatsächlich zu dem Wert $J/2\pi r$.

Ist andererseits etwa $r = a$, so reduziert sich der zweite Bruch unter dem Integralzeichen von (1) wegen (2c) auf den Faktor b . Der neue Integrand enthält jetzt nicht mehr die Polgruppe γ . Der Integrationsweg (2L) darf mithin in diesem Fall an die reelle Zahlenachse herangebogen und die beiden Wegghälften von (2L) schließlich jede auf einen Umlauf um je einen der beiden Pole $\pm \sqrt{i}$ reduziert werden. Der Residuensatz führt auch hier für \mathfrak{H}_φ sofort zu dem erforderlichen Wert $J/2\pi a$. Auf die gleiche Weise läßt sich zeigen, daß aus (1) für $r = b$ wie notwendig der Wert $J/2\pi b$ herauskommt. Das Integral (1) stellt mithin tatsächlich die richtige Lösung der Aufgabe dar.

3.1. Die Lösung für den Grenzfall des rechteckigen Stabes

Aus der Gl. (1) läßt sich mit geringer Mühe eine gleichartige Beziehung für die Feldstärke im Innern eines unendlich langen, rechteckigen Stabes herleiten, der in einem zu seiner Achse parallelen, homogenen Felde steht. Nach den Ausführungen im Abschnitt 1 ist dazu nur nötig, in (1) die Gl. (5)

$$(5a) \quad b = v + h,$$

$$(5b) \quad a = v - h,$$

$$(5c) \quad r = v + x$$

einzusetzen und $v \rightarrow \infty$ gehen zu lassen. Nach (5) hat h die Bedeutung der halben Höhe des Rechtecks in Richtung der x -Achse, während die Höhe des Rechtecks in Richtung der z -Achse nach wie vor durch $2d$ gegeben ist. Außerdem ist sinngemäß für $v \rightarrow \infty$

$$\lim \frac{J}{2\pi v} = \mathfrak{H}_y^{(e)}$$

zu setzen. $\mathfrak{H}_y^{(e)}$ bezeichnet dann die Größe des eingepprägten, zur y -Achse parallelen Feldes. Für die Feldstärke \mathfrak{H}_y im Innern des rechteckigen Stabes folgt demgemäß aus (1) in Rücksicht auf (2f) die Beziehung:

$$(6) \quad \mathfrak{H}_y = -i \cdot \mathfrak{H}_y^{(e)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2L)} \frac{\mathfrak{G}[\kappa z \sqrt{s^2 - i}]}{\mathfrak{G}[\kappa d \sqrt{s^2 - i}]} \cdot \frac{\cos \kappa s x}{\cos \kappa s h} \cdot \frac{ds}{s \cdot (s^2 - i)}.$$

In (6) hat der Integrand dieselben Polgruppen α , β und δ wie in (1). Die Polgruppe γ wird dagegen im vorliegenden Falle von einer unendlichen Kette rein imaginärer und einfacher Pole in den

Punkten $s_p^{(i)} = \pm \frac{i \cdot \pi (p + 0,5)}{(\pi h)}$ gebildet. Der Integrationsweg von (6) kann daher tatsächlich der gleiche sein wie in (1). In allen Randpunkten des Rechtecks nimmt ξ_y gemäß (6) den konstanten Wert $\xi_y^{(p)}$ an. Dies kann auf dieselbe Weise wie oben gezeigt werden. Die Gl. (6) stellt also auch im vorliegenden Falle die richtige Lösung dar.

Der Ausdruck für ξ_y wurde im vorstehenden auf deduktivem Wege aus der allgemeineren Lösung (1) hergeleitet. Selbstverständlich kann er auch direkt über die Differentialgleichung für ξ_y und die zugehörige Grenzbedingung gewonnen werden. Diese Aufgabe ist fraglos viel leichter zu lösen als die vorliegende, die eine unmittelbare Herleitung von (1) verlangt. Ist aber die Gl. (6) auf diesem einfacheren Wege erst einmal gefunden, so läßt sie sich umgekehrt mit Vorteil dazu benutzen, auf induktivem Wege dem schwierigeren Problem der Kreislochplatte beizukommen. In der Tat unterscheiden sich die Integranden von (1) und (6) nur in dem verschiedenen Aufbau ihres mittleren Faktors, und das steht bei der inneren Verwandtschaft der beiden Fälle von vornherein zu erwarten. Nun führt die Differentialgleichung (2.1) ganz von selbst zu dem Ersatz des Gliedes $\cos(\pi s x)$ in (6) durch die beiden entsprechenden Zylinderfunktionen J_1 und Y_1 mit dem Argument $\pi s r$. Die weiteren Glieder in dem neuen Zähler und Nenner müssen außerdem u. a. so gewählt werden, daß der Grenzübergang $v \rightarrow \infty$ nach Anwendung von (5) im wesentlichen auf den Bruch $\frac{\cos(\pi s h)}{\cos(\pi s h)}$ zurückführt. Nach einiger Einfühlung kann auf diese Weise sehr bald die richtige Zusammensetzung des Integranden herausgefunden werden. Tatsächlich wurde die Gl. (1) vom Verf. auf diesem Wege gewonnen.

4. Das komplexe Integral für die Energieverluste

Um mittels (3.1) die Beziehung für die Energieverluste in der Kreislochplatte aufzustellen, wird am zweckmäßigsten der komplexe Poyntingsche Satz benutzt. Danach besteht für die mittleren Wärmeverluste Q_m und für den mittleren Betrag W_m an magnetischer Energie innerhalb der Kreislochplatte der folgende Ausdruck:

$$(1) \quad \sigma \cdot \frac{[Q_m - 2i\omega \cdot W_m]}{J} = \int_0^a i_z(b, z) \cdot dz - \int_0^a i_z(a, z) \cdot dz - \int_a^b i_r(r, d) \cdot dr,$$

worin \bar{J} den konjugiert komplexen Wert von J vorstellt. Die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretenden Integrale können nach Berücksichtigung von (2.3a, b) und (3.2) leicht ausgewertet

werden. Für den komplexen Scheinwiderstand des Einzelleiters kommt damit nach der üblichen Definition von R und ωL die Darstellung zustande:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} R - i \omega L &= \frac{2}{J^2} \cdot [Q_m - 2i \omega \cdot W_m] \\ &= -\frac{1}{\pi \sigma} \cdot \frac{d}{a \cdot b} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2L)} \frac{\Re g(\kappa d \sqrt{s^2 - i})}{\kappa d \sqrt{s^2 - i}} \\ &\quad \cdot \frac{\kappa b \cdot g(\kappa s; a, b) + \kappa a \cdot g(\kappa s; b, a) - \left(\frac{4}{\pi s}\right) \cdot \frac{ds}{s^2 \cdot (s^2 - i)}}{f(\kappa s; a, b)} \end{aligned} \right.$$

Hierin ist $g(\lambda; a, b)$ durch die Gl. (3) bestimmt und die damit definierte

$$(3) \quad g(\lambda; a, b) = Y_0(a\lambda) \cdot J_1(b\lambda) - Y_1(b\lambda) \cdot J_0(a\lambda).$$

Funktion besitzt die durch die nachstehenden Formeln ausgedrückten Eigenschaften:

$$(3a') \quad g(\lambda; a + \varepsilon, a) \rightarrow \frac{2}{\pi a \lambda} - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \lambda^2 \cdot \frac{2}{\pi a \lambda} \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$(3a'') \quad \left\{ \begin{aligned} g(\lambda; a, a + \varepsilon) &\rightarrow \frac{2}{\pi a \lambda} - \varepsilon \lambda \cdot \frac{2}{\pi a^2 \lambda^2} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \lambda^2 \cdot \frac{1}{\pi a \lambda} \left(\frac{4}{a^2 \lambda^2} - 2 \right) \\ &\quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned} \right.$$

$$(3b) \quad \left\{ \begin{aligned} g(\lambda; a, b) &\rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{2}{b \lambda} + \lambda b \cdot \left(\ln \frac{a}{b} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right) + O(\lambda^2) \right] \\ &\quad (\lambda \rightarrow 0), \end{aligned} \right.$$

$$(3c) \quad g(\lambda \cdot e^{m\pi i}; a, b) = e^{m\pi i} \cdot g(\lambda; a, b) \quad (m = \pm 0, 1, 2 \dots),$$

$$(3d) \quad \left\{ \begin{aligned} g(\lambda; a, b) &\rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \lambda \cdot \sqrt{ab} \right)^{-1} \cdot \cos \lambda(a - b) \\ &\quad \text{für } b, a \rightarrow \infty \text{ oder } \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \right.$$

$$(3e) \quad \left\{ \begin{aligned} g(\lambda; a, b) &\rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \lambda b \right)^{-1/2} \\ &\quad \cdot \left[Y_0(a\lambda) \cdot \cos \left(\lambda b - \frac{3\pi}{4} \right) - J_0(a\lambda) \cdot \sin \left(\lambda b - \frac{3\pi}{4} \right) \right] \text{ für } b \rightarrow \infty, \end{aligned} \right.$$

$$(3e') \quad \left\{ \begin{aligned} g(\lambda; b, a) &\rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \lambda b \right)^{-1/2} \\ &\quad \cdot \left[J_1(a\lambda) \cdot \sin \left(\lambda b - \frac{\pi}{4} \right) - Y_1(a\lambda) \cdot \cos \left(\lambda b - \frac{\pi}{4} \right) \right] \text{ für } b \rightarrow \infty. \end{aligned} \right.$$

Gemäß (3b) ist daher

$$(3f) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa b \cdot g(\kappa s; a, b) + \kappa a \cdot g(\kappa s; b, a) - \frac{4}{\pi s} &\rightarrow -\frac{\pi^2 \cdot s}{\pi} \cdot (b^2 - a^2) \cdot \ln \frac{b}{a} \\ &\quad (\kappa s \rightarrow 0). \end{aligned} \right.$$

In (2) ist der Integrand wiederum eine in der s -Ebene eindeutige und ungerade Funktion von s , die wegen (3f) die gleichen Pol-

gruppen α, β, γ und δ aufweist wie der Integrand von (3.1). Auch über die Lage des Integrationsweges zu den Polen und über die absolute Konvergenz gelten die gleichen Bemerkungen wie zu dem Integral in (3.1).

Wird in (2) entweder $d = 0$ oder $a = b$, so muß $R - i\omega L$ jedesmal verschwinden. Das ist auch in der Tat der Fall, denn für $b = a + \varepsilon \rightarrow a$ z. B. geht wegen $(3a', a'')$ der Zähler im zweiten Bruch des Integranden wie ε^2 gegen Null, während der Nenner nach (3.2c) mit ε nur in der ersten Ordnung verschwindet.

Es gehe andererseits in (2) infolge einer ständig abnehmenden Frequenz $\omega \rightarrow 0$. Dann reduziert sich wegen (3f) die rechte Seite der Gl. (2) auf den Ausdruck (2'), dessen Integral nach dem Residuen-

$$(2') \quad -\frac{1}{\pi} \cdot \omega \Pi \mu \cdot d \cdot \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2L)} \frac{ds}{s \cdot (s^2 - i)}$$

satz sofort ausgewertet werden kann. Für die Induktivität L der Scheibe kommt also im Gleichstromfalle die Beziehung zustande:

$$(2a) \quad L = \frac{1}{2\pi} \cdot \Pi \mu \cdot 2d \cdot \ln \frac{b}{a} H.$$

Das entspricht aber tatsächlich dem Beitrag, den der von der Kreislochplatte besetzte Raumteil zu der Induktivität des Einzelleiters liefert.

4.1. Einige Grenzfälle in der Beziehung für die Energieverluste

Aus der Beziehung (2) läßt sich wiederum ohne Schwierigkeit die ihr entsprechende Formel für die Energieverluste in einem unendlich langen, *rechteckigen Stab* herleiten, der in einem zu seiner Achse parallelen, homogenen Feld steht. Zu diesem Zweck kann an der Gl. (2) genau so vorgegangen werden wie vordem an der Gl. (3.1). Für die Energieverluste je Zentimeter Höhe eines Stabes von $2d \cdot 2h$ cm² Querschnitt entsteht damit der Ausdruck:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} q_m - i\omega l_m = & -\frac{2\pi d}{\sigma} \cdot (\mathfrak{H}_y^{(e)})^2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2L)} \frac{\mathfrak{R}_B(xd\sqrt{s^2-i})}{xd\sqrt{s^2-i}} \\ & \cdot \operatorname{tg} \pi h s \cdot \frac{ds}{s^2 \cdot (s^2 - i)} \end{aligned} \right.$$

Über die Pole des Integranden von (4) gilt das gleiche wie im Anschluß an die Gl. (3.6).

Ein anderer praktisch wichtiger Grenzfall ergibt sich aus der Annahme, daß die Höhe $2d$ der Kreislochplatte bei sonst unveränderlichem b und a über alle Grenzen wächst. Um für den damit entstehenden *unendlich langen Hohlzylinder* die Grenzform von (2)

angeben zu können, muß wohl beachtet werden, daß sich nach (3. 7 a, b) in diesem Falle die Pole der Polgruppe δ mehr und mehr auf die beiden Stellen $s = \pm \sqrt{i}$ zusammenziehen¹⁾. In der Grenze kann daher der Integrationsweg (2L) nicht mehr zwischen den beiden benachbarten Polen $\pm \sqrt{i}$ und $s_0^{(k)}$ hindurchlaufen. Diese Schwierigkeit muß unter allen Umständen vermieden werden. Dies kann dadurch geschehen, daß vor dem Grenzübergang der Integrationsweg (2L) über die beiden Pole $\pm \sqrt{i}$ hinweggezogen und mehr an die reelle Achse herangebogen wird. Der so verlagerte neue Integrationsweg von Fig. 3 werde mit (2L₀) bezeichnet. Statt (10) ergibt sich damit der Ausdruck:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} R - i \omega L &= -\frac{1}{\pi \sigma} \cdot \frac{x d}{a b} \cdot \sqrt{i} \\ &\quad \cdot \frac{b \cdot g(x \sqrt{i}; a, b) + a \cdot g(x \sqrt{i}; b, a) - \left(\frac{4}{\pi x \sqrt{i}} \right)}{f(x \sqrt{i}; a, b)} \\ &\quad - \frac{1}{\pi \sigma} \cdot \frac{d}{a b} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2L_0)} \frac{\Im g(x d \sqrt{s^2 - i})}{x d \sqrt{s^2 - i}} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{x b \cdot g(x s; a, b) + x a \cdot g(x s; b, a) - \left(\frac{4}{\pi s} \right)}{f(x s; a, b)} \cdot \frac{ds}{s^2 \cdot (s^2 - i)}. \end{aligned} \right.$$

In dem Integral der Gl. (5) darf nun der Grenzübergang $d \rightarrow \infty$ ohne weiteres vollzogen werden. Das Integral behält dabei jedenfalls einen endlichen Betrag. Ein sehr langer Einzelleiter mit weit entfernter oder coaxialer Rückleitung besitzt also infolge eines zu ihm gleichachsigt angeordneten, elektrisch leitenden Hohlzylinders, der ihn auf seine ganze Länge hin umgibt, je Zentimeter seiner Länge den folgenden zusätzlichen, komplexen Energieverlust:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} r(a, b) - i \omega \cdot l(a, b) &= -\sqrt{i} \cdot \frac{x}{2\pi \sigma \cdot a \cdot b} \\ &\quad \cdot \frac{b \cdot g(x \sqrt{i}; a, b) + a \cdot g(x \sqrt{i}; b, a) - \left(\frac{4}{\pi x \sqrt{i}} \right)}{f(x \sqrt{i}; a, b)} \cdot \frac{\text{Ohm}}{\text{cm}}. \end{aligned} \right.$$

Gemäß der Herleitung liegt (6) die Voraussetzung zugrunde, daß die magnetische Feldstärke an der inneren Zylinderwandung den Wert $J/2\pi a$ und an der äußeren den Wert $J/2\pi b$ hat. Würde der unendlich lange Hohlzylinder zugleich die Rückleitung für den Strom im linearen Leiter bilden, so verschwände die

1) Dieses Zusammenrücken der Pole hat einen tieferen Sinn. Es zeigt bildlich an, daß im Grenzfall aus der Polkette ein Verzweigungsschnitt wird. Vgl. auch den Abschnitt 5,1.

magnetische Feldstärke an der äußeren Zylinderwandung. Für den scheinbaren Widerstand des Leiters je Zentimeter Länge gilt in diesem Fall der bekannte, einfachere Ausdruck:

$$(7) \quad \bar{r} - i\omega \bar{l} = -\sqrt{i} \cdot \frac{\pi}{2\pi a \cdot \sigma} \cdot \frac{g(\pi\sqrt{i}; a, b)}{f(\pi\sqrt{i}; a, b)}.$$

In (6) sei zunächst b sehr groß gegenüber a . Dann ergibt die Beziehung (6) numerisch merklich dasselbe wie im Grenzfall $b \rightarrow \infty$. Die entsprechende Leiteranordnung besteht jetzt aus einem sehr langen Einzelleiter, der in der Achse einer kreisförmigen Bohrung innerhalb eines unendlich ausgedehnten, leitenden Körpers verläuft. Nach Ausführung des Grenzüberganges in (6) ergibt sich mittels (3 e', e'') für die komplexen Energieverluste eines solchen Leiters die einfachere Formel:

$$(6a) \quad r(a, \infty) - i\omega \cdot l(a, \infty) = -\sqrt{i} \cdot \frac{\pi}{2\pi a \sigma} \cdot \frac{H_0^{(1)}(a\pi\sqrt{i})}{H_1^{(1)}(a\pi\sqrt{i})} \frac{\text{Ohm}}{\text{cm}}.$$

Der Rückstrom verläuft hierbei im wesentlichen an der Innenfläche der Bohrung. In der Tat führt auch die Gl. (7) für $b \rightarrow \infty$ auf (6a) zurück.

Es sei andererseits b nur wenig größer als a mit $b - a \ll a$. Dann werden zweckmäßig nach (8a) und (8b) die Funktionen $f(\lambda; a, b)$ und $g(\lambda; b, a)$ um den Punkt $a\lambda$ herum nach Potenzen von $\lambda(b-a)$ entwickelt. Dagegen wird für die Funktion $g(\lambda; a, b)$ eine solche Entwicklung gemäß (8c) besser um den Punkt $b\lambda$ herum vorgenommen.

$$(8a) \quad f(\lambda; a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda(b-a)]^n}{n!} P_{n+1}(a\lambda),$$

$$(8b) \quad g(\lambda; b, a) = \frac{2}{\pi a \lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda(b-a)]^n}{n!} P_n(a\lambda),$$

$$(8c) \quad g(\lambda; a, b) = \frac{2}{\pi b \lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \cdot \frac{[\lambda(b-a)]^n}{n!} \cdot P_n(b\lambda).$$

In den Gl. (8) bedeutet $P_n(a\lambda)$ die durch (9) definierte Funktionaldeterminante. Diese Determinante

$$(9) \quad P_n(a\lambda) = J_1(a\lambda) Y_0^{(n)}(a\lambda) - Y_1(a\lambda) J_0^{(n)}(a\lambda).$$

läßt sich bekanntlich rational durch die $a\lambda$ ausdrücken. So gelten für die sechs ersten Ableitungen die nachstehenden Ausdrücke¹⁾:

1) S. G. N. Watson, a. a. O., S. 76. Vgl. auch die Arbeit von S. A. Schelkunoff, The electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Lines and Cylindrical Shields, Bell System Techn. Journ., Vol. 13 (1934), auf S. 562.

$$(9a) \quad P_1(z) \equiv 0, \quad (9b) \quad P_2(z) = -\frac{2}{\pi z}, \quad (9c) \quad P_3(z) = -\frac{2}{\pi z^2},$$

$$(9d) \quad P_4(z) = \frac{2}{\pi z} - \frac{6}{\pi z^3}, \quad (9e) \quad P_5(z) = -\frac{4}{\pi z^2} + \frac{24}{\pi z^4},$$

$$(9f) \quad P_6(z) = -\frac{2}{\pi z} + \frac{18}{\pi z^3} - \frac{120}{\pi z^5}.$$

Man gehe gemäß (8) mit ihnen in (6) ein. Für den komplexen Energieverlust eines sehr dünnwandigen Hohlzylinders entsteht damit je Zentimeter seiner Länge angenähert die Beziehung:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} r(a, b) - i\omega \cdot l(a, b) &\approx -i \cdot \frac{\pi}{\sigma \cdot 2\pi b} \cdot \pi(b-a) \cdot \\ &1 - \frac{i}{12} \cdot [\pi(b-a)]^2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{(b-a)^2}{a b} \pm \dots \\ &\frac{1 - \frac{b-a}{b} \cdot (b-a) \pi \sqrt{i} - \frac{1}{6} \cdot i \cdot \pi^2 (b-a)^2 \cdot \left(1 + \frac{3i}{a^2 \pi^2}\right) \pm \dots}{\dots} \end{aligned} \right.$$

Die erste Näherung dieser Gleichung führt wieder zu dem Beitrag einer sehr dünnen zylindrischen Schale zu der Induktivität eines Einzeleleiters.

5. Die Formeln für die Energieverluste im allgemeinen Fall

Der Ausdruck (4.2) für den komplexen Scheinwiderstand des Einzeleleiters gilt für beliebige Werte der vier reellen Parameter π , a , b und d . Die weiteren Rechnungen haben dann darauf abzu zielen, von der Darstellung der Energieverluste als komplexes Integral zu Formeln zu gelangen, die für die numerische Berechnung der Verluste geeignet sind. Die einfachste und in vielen Fällen auch wirksamste Art der weiteren Behandlung des Integrals liegt in seiner Auflösung in unendliche Reihen. Damit diese Umgestaltung jeweils auf möglichst rasch konvergente Reihenentwicklungen führt, muß je nach der absoluten Größe der vier Parameter oder gewisser Kombinationen von ihnen verschieden vorgegangen werden. Die folgenden Untersuchungen berücksichtigen davon drei praktisch besonders wichtige Fälle.

5.1. Die Energieverluste für πd , $\pi a \gg 1$

Im ersten dieser Fälle sei jedes der beiden Produkte πa und πd wesentlich größer als 1. Dies mag darin seinen Grund haben, daß π infolge einer hohen Frequenz oder einer hohen Leitfähigkeit selbst von beträchtlicher Größe ist. In der Regel ist bei dieser Annahme auch noch $\pi(b-a)$ eine große Zahl. In erster Näherung kommt es dann darauf an, die Grenzform von (4.2) für $\pi \rightarrow \infty$ zu finden. Nun rücken hierfür zunächst einmal wie in dem eben be-

handelten Grenzfall die Pole $\pm \sqrt{i}$ und $\pm s_p^{(k)}$ immer näher aneinander. Für $R - i\omega L$ wird daher zweckmäßig von vornherein von der Darstellung (4.5) ausgegangen. Wegen (3.3) und (3.2f) gilt aber

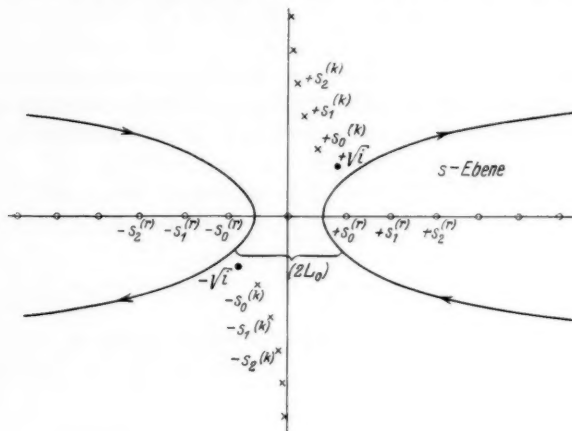


Fig. 3

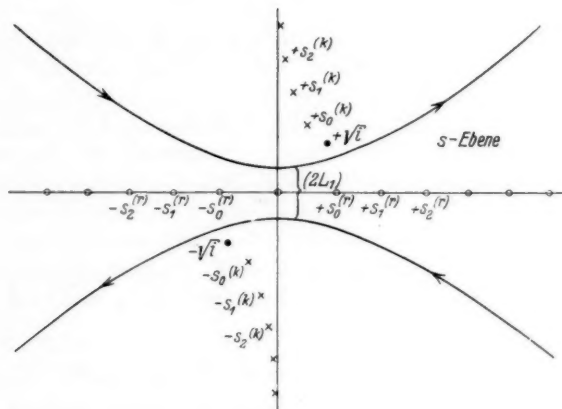


Fig. 4

für $\kappa \rightarrow \infty$ das gleiche von der Lage der Pole $\pm s_p^{(r)}$ zum Nullpunkt. Der Integrationsweg $(2L_0)$ muß also entsprechend dem Übergang von Fig. 3 zu Fig. 4 auch aus dem Zwischenraum zwischen dem Nullpunkt und den Polen $\pm s_0^{(r)}$ herausgezogen werden. Der da-

durch entstehende Integrationsweg ($2 L_1$) ist in Fig. 4 dargestellt. Die Umformung des Weges ($2 L_1$) in den Weg ($2 L_0$) kann etwa in der Weise erfolgen, daß die untere Weggälfte von ($2 L_1$) über den im Nullpunkt liegenden Pol hinübergestreift wird. Außer (4,2) und (4,5) gilt daher für den äußeren Scheinwiderstand auch noch die andere Integraldarstellung:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} R - i\omega L = & + \frac{\pi}{\pi\sigma} \cdot \sqrt{-i} \cdot \ln \frac{b}{a} \cdot \Im g(\pi d \sqrt{-i}) \\ & - \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{\pi d}{a \cdot b} \cdot \sqrt{i} \cdot \frac{b \cdot g(\pi \sqrt{i}; a, b) + a \cdot g(\pi \sqrt{i}; b, a) - \left(\frac{4}{\pi \pi \sqrt{i}}\right)}{f(\pi \sqrt{i}; a, b)} \\ & - \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{d}{a \cdot b} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(2 L_1)} \frac{\Im g(\pi d \cdot \sqrt{s^2 - i})}{\pi d \sqrt{s^2 - i}} \\ & \cdot \frac{\pi b \cdot g(\pi s; a, b) + \pi a \cdot g(\pi s; b, a) - \left(\frac{4}{\pi s}\right)}{f(\pi s; a, b)} \cdot \frac{ds}{s^2 \cdot (s^2 - i)}. \end{aligned} \right.$$

Für $\pi \rightarrow \infty$ besteht aber gemäß (3.2f) und (4.3d) für den zweiten Bruch im Integranden von (1) längs des ganzen Integrationsweges die Grenzgleichung:

$$(2) \quad \left\{ \frac{b \cdot g(\pi s; a, b) + a \cdot g(\pi s; b, a) - \left(\frac{4}{\pi \pi s}\right)}{f(\pi s; a, b)} \rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{\sin \pi s (b-a)} - (a+b) \cdot \operatorname{ctg} \pi s (b-a) \right.$$

und da auf diesem Wege nirgends $\Im m(s) = 0$ ist, so darf¹⁾ die rechte Seite von (2) bis auf Glieder von der Ordnung $\exp. [-2\pi(b-a) \cdot |\Im m(s)|]$ mit $\pm i \cdot (a+b)$ identifiziert werden, je nachdem $\Im m(s) \geq 0$ ist. Ebenso ist in (1) bis auf Glieder von der Ordnung $\exp. [-2\pi d \cdot \operatorname{Re} \sqrt{s^2 - i}]$ unter der gleichen Bedingung die Funktion $\Im g(\pi d \sqrt{s^2 - i})$ der Einheit gleich, denn der Weg ($2 L_1$) läßt sich in einem endlichen, von π unabhängigen Abstände an den Punkten $\pm \sqrt{i}$ vorbeiführen. In der letzten Behauptung über das Verhalten des $\Im g$ steckt noch implizite die weitere Voraussetzung, daß längs ($2 L_1$) überall

$$\operatorname{Re} \sqrt{s^2 - i} > 0$$

ist. Diese Annahme ist gemäß Fig. 5 tatsächlich mit dem Verlauf dieses Weges in der s -Ebene verträglich, wenn die Phasenwinkel von $s \pm \sqrt{i}$ in der dort angegebenen Weise gewählt werden. Der

1) Man kann nämlich schreiben $\operatorname{ctg} z = +i \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot e^{-2iz}}{1 - e^{-2iz}} \right]$ für $\Im m(z) < 0$ oder $\operatorname{ctg} z = -i \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot e^{2iz}}{1 - e^{2iz}} \right]$ für $\Im m(z) > 0$. Ebenso ist $\Im g z = 1 - \frac{2 \cdot e^{-2z}}{1 + e^{-2z}}$.

Verzweigungsschnitt der Funktion $\sqrt{s^2 - i}$ muß bei dieser Festsetzung der Phase vom Punkte $+\sqrt{i}$ über den unendlich fernen Punkt zum Punkte $-\sqrt{i}$ geführt werden. Das Glied mit dem Integral in (1) hat sich damit bisher, von den Exponentialgliedern abgesehen, auf den Ausdruck reduzieren lassen:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi^2 \cdot \sigma} \cdot \frac{a+b}{a \cdot b} \cdot \left[\int_{L_{10}} \frac{ds}{s^2 \cdot (s^2 - i)^{1/2}} - \int_{L_{1u}} \frac{ds}{s^2 \cdot (s^2 - i)^{1/2}} \right] \\
 & = -\frac{1}{\pi^2 \sigma} \cdot \frac{a+b}{a \cdot b} \cdot \int_{L_{10}} \frac{ds}{s^2 \cdot (s^2 - i)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

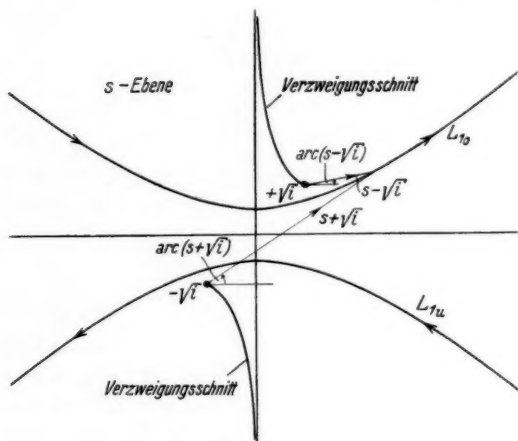


Fig. 5

In dem letzten Integral kann der Integrationsweg L_{10} von beiden Seiten her an den oberen Verzweigungsschnitt herangeklappt werden. Mit Hilfe der Substitution $s = \left(\frac{i}{v}\right)^{1/2}$ entsteht hieraus in der v -Ebene ein Schleifenintegral, dessen Weg im Nullpunkt dieser

$$(2a) \quad \int_{L_{10}} \frac{ds}{s^2 \cdot (s^2 - i)^{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot e^{+\frac{3\pi i}{2}} \cdot \int_0^{(1+)} v \cdot (v-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot dv = -4i.$$

Ebene beginnt, den Punkt $+1$ im positiven Sinne umläuft und wieder im Nullpunkt endet. Zu Anfang des Weges ist dabei in (2a) $\arcsin(v-1) = -\pi$ und gegen Ende $\arcsin(v-1) = +\pi$. Der Wert dieses Schleifenintegrals kann leicht ermittelt werden und ist in (2a) angegeben. Abgesehen von den Exponentialgliedern, die

für $\kappa \rightarrow \infty$ sehr rasch verschwinden, führt also die zweite Zeile von (1) auf den von κ unabhängigen, asymptotischen Näherungswert:

$$\frac{4i}{\pi^2 \cdot \sigma} \cdot \frac{a+b}{a \cdot b}.$$

Demgegenüber hängen die beiden ersten Zeilen von (1) im wesentlichen linear von κ ab, denn die übrigen mit κ behafteten Glieder sind in Rücksicht auf (2) und auf die Fußnote ausschließlich Exponentialfunktionen, die die Exponenten $-\sqrt{2}\kappa \cdot (b-a)$ oder $-\sqrt{2}\kappa \cdot d$ haben und zu dem linearen Glied additiv hinzutreten. Für sehr hohe Frequenzen berechnet sich demnach der fiktive Scheinwiderstand eines Einzeileiters infolge einer axial zu ihm angeordneten Kreislochscheibe nach der Näherungsformel:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} R - i\omega L \sim \frac{\kappa}{\pi\sigma} \cdot \sqrt{-i} \cdot \left[\ln \frac{b}{a} + \frac{d}{a} + \frac{d}{b} \right] \\ + \frac{4i}{\pi^2 \cdot \sigma} \cdot \frac{a+b}{ab} + O(e^{-\kappa d}, e^{-\kappa(b-a)}). \end{aligned} \right.$$

Gemäß dem Hauptglied von (3) kann bei Hochfrequenz die Wirbelströmung in der Platte aufgefaßt werden als eine Strömung, die die Randgebiete der Scheibe gleichmäßig bis zu einer Tiefe von $(1/\kappa)$ cm durchfließt und wobei die Platte eine scheinbare komplexe Leitfähigkeit $\sigma\sqrt{i}$ besitzt. Für eine derartige Strömung berechnet sich nämlich der Widerstand des durchströmten Gebiets nach einer bekannten Formel zufolge der Gleichung:

$$\frac{2d}{\left(\frac{1}{\kappa}\right) \cdot 2\pi a \cdot \sigma\sqrt{i}} + \frac{2d}{\left(\frac{1}{\kappa}\right) \cdot 2\pi b \cdot \sigma\sqrt{i}} + \frac{2}{\left(\frac{1}{\kappa}\right) \cdot \sigma\sqrt{i}} \cdot \int_a^b \frac{dr}{2\pi r},$$

denn z. B. für die Strömung senkrecht zur Plattenachse ist der Querschnitt des Strombandes veränderlich, und zwar gleich

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right) \cdot 2\pi r \text{ cm}^2.$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich aber in der Tat das erste Glied von (3). Das zweite Glied dieser Gleichung bringt jedenfalls richtig zum Ausdruck, daß sich der Phasenwinkel des Scheinwiderstandes mit wachsendem κ dem Winkel 45° von kleineren Werten her nähert.

5.2. Die Energieverluste der Kreislochplatte für $\kappa d < 1$

Im zweiten der zu betrachtenden Fälle sei κd entweder infolge eines kleinen κ oder wegen einer nur geringen Plattendicke eine beliebige Zahl zwischen 0 und 1 oder doch nur wenig größer als 1. Dagegen soll über die Größenordnung von κa und κb vorläufig nichts ausgesagt werden. Um unter diesen Bedingungen eine brauch-

bare Formel für $R - i\omega L$ zu finden, ist in der Gl. (4.2) der Integrationsweg ($2L$) auf diejenigen Pole zusammenzuziehen, die in dem senkrechten Streifen zwischen seinen beiden Weghälften enthalten sind. Dies sind die Pole der Gruppen α und β . Da alle diese Pole nur einfache Pole sind, so stößt die Berechnung ihrer Residuen auf keine Schwierigkeiten. Als Resultat dieser Umformung ergibt sich damit für den äußeren Scheinwiderstand die folgende absolut konvergente unendliche Reihe:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} R - i\omega L = & \frac{\pi \sqrt{-i}}{\pi \sigma} \cdot \Im g(\pi d \sqrt{-i}) \cdot \ln \frac{b}{a} \\ & - \frac{8 \cdot \pi d}{\pi^3 \sigma \cdot a b} \cdot \sqrt{i} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos^{3/2} \alpha_p}{(2p+1)^2} \cdot e^{-\frac{3}{2} i \alpha_p} \\ & \cdot \frac{b \cdot g(\pi s_p^{(k)}; a, b) + a \cdot g(\pi s_p^{(k)}; b, a) - \left(\frac{4}{\pi \pi s_p^{(k)}} \right)}{f(\pi s_p^{(k)}; a, b)} \end{aligned} \right.$$

in der $s_p^{(k)}$ und α_p durch die Gl. (3.4) und (3.4b) definiert sind. Demnach ist im besonderen $\cos(\alpha_p)$ aus der Beziehung zu berechnen:

$$(4a) \quad \cos \alpha_p = \left[1 + \left(\frac{\pi}{\pi d} \right)^4 \cdot \left(p + \frac{1}{2} \right)^4 \right]^{-1/2},$$

so daß für ein $\pi d < 1$ schon nach wenigen Gliedern $\cos^{3/2}(\alpha_p)$ näherungsweise durch $\left(\frac{2 \cdot \pi d}{\pi (2p+1)} \right)^{+3}$ ersetzt werden kann. Die Koeffizienten der Reihe (4) nehmen somit merklich wie die reziproken fünften Potenzen der ungeraden Zahlen ab. Die Reihe (4) kann unter diesen Umständen auch dann, wenn eine weitere Vereinfachung wegen eines ungünstigen Wertebereichs nicht möglich sein sollte, noch zur numerischen Berechnung von $R - i\omega L$ verwendet werden.

In den meisten praktischen Fällen wird sich allerdings eine solche Möglichkeit bieten, denn gerade bei dünnen Kreislochplatten ist für gewöhnlich a und damit erst recht b von so großem Betrage, daß schon für das absolut kleinste Argument

$$|a \pi s_0^{(k)}| = a \pi \cdot \left[1 + \left(\frac{\pi}{2 \pi d} \right)^4 \right]^{1/4}$$

der Zylinderfunktionen in (4) die asymptotischen Näherungen dieser Funktionen verwendet werden können. Für $|a \pi s_0^{(k)}| \gg 1$ kann dann zunächst wegen (2) der zweite Bruch hinter dem Summenzeichen von (4) in der kürzeren Form $-(a+b) \cdot \operatorname{ctg}(\pi s_p^{(k)}(b-a))$ angeschrieben werden, und dies wieder darf, falls $b-a$ nicht gerade wesentlich

kleiner als a ist, wegen $\Im(s_p^{(k)}) > 0$ in einem vergleichbaren Grade der Näherung durch $i \cdot (a+b)$ ersetzt werden. Für die zweite Zeile von (4) ist damit bis jetzt entstanden:

$$-\frac{8 \cdot \pi d}{\pi^3 \sigma} \cdot \frac{a+b}{ab} \cdot i \cdot \sqrt{i} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cdot \left[\frac{1}{\cos \alpha_p} \cdot e^{i\alpha_p} \right]^{-1/2}.$$

Wegen $\frac{\exp(i\alpha_p)}{\cos(\alpha_p)} = i \cdot \operatorname{tg}(\alpha_p) \cdot (1 - i \cdot \operatorname{ctg} \alpha_p)$ folgt daraus in Rücksicht auf (3.7) die andere Schreibweise:

$$-\frac{64 \cdot \pi^4 d^4}{\sigma \cdot \pi^6} \cdot \frac{a+b}{ab} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} \cdot (1 - i \cdot \operatorname{ctg} \alpha_p)^{-3/2}.$$

Solange nun $\operatorname{ctg} \alpha_0 = \left(\frac{2\pi d}{\pi}\right)^2 < 1$ ist, erlaubt die unter dem Summenzeichen auftretende Potenz die Entwicklung in eine unendliche Reihe, und danach kann noch die Summationsfolge vertauscht werden. Die Summation über p führt aber sogleich zu der Riemannschen ζ -Funktion¹⁾. Unter der Bedingung $\pi d < \frac{\pi}{2}$ läßt sich mithin für große Werte von πa in Ergänzung zu (4) der fiktive Scheinwiderstand auch in der Form angeben:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} R - i\omega L &= \frac{\pi \sqrt{-i}}{\pi \sigma} \cdot \Im g(\pi d \sqrt{-i}) \cdot \ln \frac{b}{a} - \frac{4}{\pi^2 \sigma} \cdot \left(\frac{2\pi d}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{a+b}{ab} \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{n}\right) \cdot (-i)^n \cdot \left(\frac{2\pi d}{\pi}\right)^{2n} \zeta(5+2n)(1-2^{-5-2n}). \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. (50) in der oben zitierten Arbeit von P. Debye und könnte auf sie mittels der Substitution (3.5) zurückgeführt werden. In der Tat kommen ja auch die obigen Annahmen über die Größenordnung von πd und πa darauf hinaus, daß die Kreislochplatte als ein rechteckiger Stab aufgefaßt werden darf, der zu einem Kreis von großem Durchmesser zusammengebogen worden ist.

Beim Übergang von (4) zu (5) ist damit für den einen Bestandteil von $R - i\omega L$ eine nach Potenzen von $\pi^2 d^2$ fortschreitende Reihe gewonnen worden. Dieser Darstellung würde es entsprechen, in (5) auch den anderen Bestandteil mit der Funktion $\Im g(\pi d \sqrt{-1})$ durch eine solche Reihe zu ersetzen. Jedoch soll hier aus Gründen der Platzersparnis davon abgesehen werden.

1) Eine bequem zugängliche Tafel der ζ -Funktion von Riemann enthalten die neuen Funktionentafeln von Jahnke-Emde, 2. Aufl., 1933, S. 323.

5.2. Die Energieverluste für eine Hülse mit $b - a \ll d$

Im dritten und letzten Falle habe der den Einzelleiter umgebende Zylinder mehr die Gestalt einer Hülse, deren Wandstärke $b - a$ kleiner als ihre Höhe $2d$ ist. Eine diesem Fall angepasste Reihenentwicklung läßt sich am bequemsten aus der Gl. (4.5) gewinnen, indem die beiden Wegg hälften von $(2L_0)$ in Fig. 3 auf die von ihnen umschlungenen Teile der reellen Achse und auf die in dieser Achse liegenden Pole der Polkette γ zusammengezogen werden. Nun gilt in der Nähe der Nullstelle $s = s_p^{(r)}$ von (3.3) mit $s = s_p^{(r)} + \varepsilon$ bei beliebig kleinem ε die Entwicklung (6). Die An-

$$(6) \quad \begin{cases} f(x s_p^{(r)} + x\varepsilon; a, b) = \varepsilon \cdot [a x \cdot g(x s_p^{(r)}; a, b) \\ - b x \cdot g(x s_p^{(r)}; b, a)] + O(\varepsilon^2) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{cases}$$

wendung des Residuensatzes führt dann von (4.5) in Rücksicht auf (6) sofort auf die folgende, vorläufige Reihendarstellung für $R - i\omega L$:

$$\begin{aligned} R - i\omega L = & -\frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{\pi d}{ab} \cdot \sqrt{i} \cdot \frac{b \cdot g(x\sqrt{i}; a, b) + a \cdot g(x\sqrt{i}; b, a) - \left(\frac{4}{\pi x\sqrt{i}}\right)}{f(x\sqrt{i}; a, b)} \\ & + \frac{2}{\pi x\sigma \cdot ab} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Im g(xd\sqrt{(s_p^{(r)})^2 - i})}{(s_p^{(r)})^2 \cdot \sqrt{(s_p^{(r)})^2 - i}} \\ & \cdot \frac{b \cdot g(x s_p^{(r)}; a, b) + a \cdot g(x s_p^{(r)}; b, a) - \left(\frac{4}{\pi x s_p^{(r)}}\right)}{a \cdot g(x s_p^{(r)}; a, b) - b \cdot g(x s_p^{(r)}; b, a)}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich durch einen Wechsel in der Bezeichnung weit übersichtlicher schreiben. Wird zunächst $xa s_p^{(r)} = t_p$ und $\frac{b}{a} = \nu > 1$ gesetzt, so nimmt die Gl. (3.3) für $s_p^{(r)}$ oder t_p die Gestalt an:

$$f(t_p; 1, \nu) = Y_1(t_p) \cdot J_1(\nu t_p) - Y_1(\nu t_p) \cdot J_1(t_p) = 0.$$

Die Wurzeln t_p dieser Gleichung hängen für jedes $p = 0, 1, 2, \dots$ natürlich von ν ab, und zwar in sehr starkem Maße¹⁾. Dagegen ist die Größe $(\nu - 1) \cdot t_p$ nur relativ geringen Schwankungen unterworfen, ändert sie sich doch z. B. zwischen $\nu = 1$ und $\nu \rightarrow \infty$ nur

1) S. A. Kalähne, Über die Wurzeln einiger Zylinderfunktionen und gewisser aus ihnen gebildeter Gleichungen, *Ztschr. f. Math. u. Phys.* 54. S. 55. 1907.

in den Grenzen π und $3,83$. In der unendlichen Reihe wird daher zweckmäßig die Substitution (7) vorgenommen:

$$(7) \quad s_p^{(r)} = \frac{1}{a\pi} \cdot t_p = \frac{1}{\pi(b-a)} \cdot v_p.$$

Berücksichtigt man dann noch die Gl. (4,6), so ist damit für den Scheinwiderstand der Hülse die weitere Beziehung entstanden:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} R - i\omega L &= 2d \cdot [r(a, b) - i \cdot \omega \cdot l(a, b)] \\ &+ \frac{2}{\pi\sigma\pi} \cdot \frac{[(b-a)\pi]^5}{a \cdot b} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Im g \left(\frac{d}{b-a} \sqrt{v_p^2 - i\pi^2(b-a)^2} \right)}{v_p^2 \cdot \sqrt{v_p^2 - i\pi^2(b-a)^2}} \\ &\cdot \frac{v \cdot g(t_p; 1, v) + g(t_p; v, 1) - \left(\frac{4}{\pi t_p} \right)}{g(t_p; 1, v) - v \cdot g(t_p, v, 1)}. \end{aligned} \right.$$

Nun ist v_p , je näher v dem Werte 1 liegt, von einem um so kleineren p an merklich gleich $\pi \cdot (1+p)$. Auch im vorliegenden Falle verhalten sich also die Koeffizienten der unendlichen Reihe im wesentlichen wie die reziproken fünften Potenzen der ganzen Zahlen. Die Reihe (8) ist demnach schon an und für sich gut konvergent.

Diese Reihe läßt sich aber unter der praktisch bedeutungslosen Einschränkung eines $v - 1 < 1$ sogleich weiter vereinfachen. Unter dieser Bedingung ist es nämlich schon für das absolut kleinste Argument t_0 der Zylinderrfunktionen in (8) mit dem ungefähren Zahlenwert $\pi/(v-1)$ zulässig, diese Funktionen durch ihre asymptotischen Näherungen zu ersetzen. In Rücksicht auf (4.3) tritt dann, nachdem von diesen Näherungen Gebrauch gemacht worden ist, an die Stelle des zweiten Bruchs unter dem Summenzeichen der Ausdruck:

$$- \frac{b+a}{b-a} + \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \cdot \frac{1}{\cos t_p(v-1)}.$$

Für ein $v - 1 < 1$ darf darin näherungsweise

$$t_p \cdot (v-1) = v_p \approx \pi \cdot (1+p)$$

gesetzt werden. Außerdem sei $d \gg b-a$ und $\pi(b-a)$ eine Zahl, die in der Nähe von 1 oder aber zwischen 0 und 1 liegt. Dann hat in (8) die Funktion $\Im g$ wesentlich den Wert 1, und für die zweite Zeile dieser Gleichung entsteht:

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{\pi^2\sigma} \cdot \left[\frac{\pi(b-a)}{\pi} \right]^4 \cdot \frac{a+b}{ab} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(1+p)^5} \\ & \cdot \left[1 - i \cdot \left(\frac{\pi(b-a)}{\pi \cdot (1+p)} \right)^2 \right]^{-3/4} \left(1 + (-)^p \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \right). \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck kann unter den bisherigen Voraussetzungen das unter dem Summenzeichen stehende Binom in eine unendliche, absolut konvergente Reihe entwickelt werden und hinterher eine Vertauschung der Reihenfolge der Summationen erfolgen. Die Summation nach p wird dadurch ausführbar und leitet wieder zu der Riemannschen ζ -Funktion. Für die Energieverluste kommt unter diesen Annahmen die endgültige Beziehung zustande:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} R - i \omega L &= 2d \cdot [r(a, b) - i \omega l(a, b)] \\ &- \frac{2}{\pi^2 \sigma} \cdot \left[\frac{x(b-a)}{\pi} \right]^4 \cdot \frac{a+b}{ab} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{n} \right) \cdot (-i)^n \\ &\cdot \left[\frac{x(b-a)}{\pi} \right]^{2n} \cdot \zeta(5+2n) \cdot \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} (1 - 2^{-4-2n}) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die rechte Seite der ersten Zeile dieser Gleichung stellt die in einer Hülse von der Höhe $2d$ auftretenden Verluste dar, wenn dabei von den Verlusten je Zentimeter Länge einer unendlich langen Hülse ausgegangen wird. Die zweite Zeile gibt die Korrektur an, die an diesem behelfsmäßigen Ergebnis wegen des Einflusses der Hülсенenden angebracht werden muß. Aus Gl. (9) ergibt sich dann, daß die Korrektur wie im Falle 5.2 im Sinne einer Verkleinerung der Verluste wirkt.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit bringt die allgemeine Lösung für das Wirbelstromfeld in einem Hohlzylinder endlicher Höhe, in dessen Achse ein wechselstromdurchflossener linearer Leiter liegt. Für die Darstellung der Lösung werden komplexe Integrale verwendet. Auch die Energieverluste im Zylinder können dann durch derartige Integrale ausgedrückt werden. Für drei praktisch besonders wichtige Grenzfälle lassen sich aus der Integraldarstellung Reihenentwicklungen herleiten, mit deren Hilfe die Verluste in ausreichender Annäherung berechnet werden können.

Berlin, Wiss. Abt. der AEG.

(Eingegangen 12. August 1935)

**Der Wieneffekt bei Elektrolyten,
untersucht mit dem Kathodenoszillographen**

Von Wilhelm Hüter

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule
in Aachen)

(Mit 13 Figuren)

Experimenteller Ausgangspunkt:

Verwandte Erscheinungen bei spannungsabhängigen festen Halbleitern

In den Überspannungsschutzapparaten der Elektrotechnik werden seit einigen Jahren spannungsabhängige Widerstände benutzt, die aus Graphit, Carborund und Ton bei hoher Temperatur gesintert werden und unter Bezeichnungen wie Silit, Ocelit, Thyrit, Givrit in Form von Stäben und Platten im Handel sind. Ihre physikalische Besonderheit liegt darin, daß bei kurzzeitigen Spannungsstößen, die praktisch keine Erwärmung des Materials hervorrufen, der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom nicht linear ist; ihre Kennlinie weicht mehr oder weniger von der Geradlinigkeit ab in der Richtung, daß zu höheren Spannungen kleinere Widerstände gehören. Bei Stäben war diese Spannungsabhängigkeit meist nicht sehr stark ausgeprägt¹⁾; in den letzten Jahren ist es aber zuerst in Amerika, dann in Deutschland gelungen, stark spannungsabhängiges Plattenmaterial auch einheitlich herzustellen. Die stark gekrümmte Charakteristik einer solchen Platte von 20 cm Durchmesser, 2,0 cm Dicke zeigt Fig. 1, die mit einem Kathodenoszillographen Rogowskischer Bauart aufgenommen ist, indem ein einzelner Spannungsstoß aus einer Kapazität von $0,2 \mu\text{F}$ über eine 100-m-Wanderwellenleitung auf den spannungsabhängigen Widerstand in Reihe mit einem spannungsunabhängigen Drahtwiderstand entladen wurde, der zur Messung des Stoßstromes dient. Außer dieser Kennlinie sind noch die Spannungsordinate (maximal etwa 4,5 kV) und die Stromabszisse aufgeschrieben, dazu noch als Vergleich ein auch bei Spannungsstoß unveränderlicher Drahtwiderstand von 1100 Ohm, der die Kennlinie des spannungsabhängigen Widerstands im Nullpunkt tangiert, also den gleichen Widerstand hat wie das spannungsabhängige Material

1) W. Hüter, Archiv f. Elektrotechnik 27. S. 341. 1933.

für kleine Spannungen. Da für den Drahtwiderstand auch die Koordinaten geschrieben wurden, sind diese teilweise verdickt. Für die Charakteristik der untersuchten Platte ergibt sich die empirische Formel $U^x = U^{3,1} = c J$; der Exponent ist, wie nochmals betont sei, nicht allgemeingültig für diese Materialien, er wechselt je nach Form (Stab oder Platte) und Fabrikat, ja früher war er ganz individuell

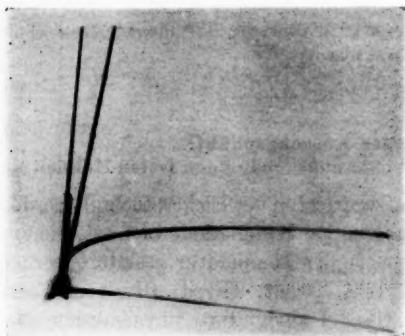


Fig. 1.

Kennlinie eines spannungsabhängigen Widerstands und eines Drahtwiderstands von 1100 Ohm bei gleicher Spannungsordinate und Stromabszisse

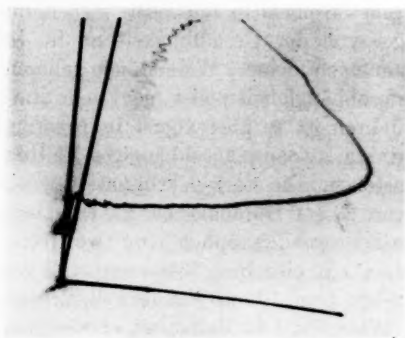


Fig. 2.

Kennlinie von 4 in Reihe geschalteten „Oxydfilm“-Platten und eines 1100 Ohm-drahtwiderstands

bei gleichen Abmessungen und liegt zwischen ungefähr 1 (praktisch spannungsunabhängig) und etwa 4, wie ich an vielen Proben durch kathodenoszillographische Beobachtung und Ausmessung von Aufnahmen nachprüfen konnte. Gewisse halbleitende, poröse oder pulverförmige Materialien, wie sie ebenfalls noch vor einigen Jahren beim Bau von Überspannungsableitern für Hochspannungsnetze verwandt wurden, verhalten sich ähnlich; hier tritt als Besonderheit eine Schleifenbildung der Kennlinie auf (Fig. 2), weil der Zündpunkt (des

behinderten Gasdurchbruchs) höher liegt als die Löschspannung, Verhältnisse, die an die Lichtbogenhysterese der Wechselstrombogenlampe erinnern, die schon vor 3 Jahrzehnten mit Hilfe der alten Braunschen Röhre festgestellt wurde. Dieser gegenüber ist bei den neuen Hochleistungs-Kathodenoszillographen, die vor allem zur Untersuchung einmaliger kurzzeitiger Vorgänge auch bei höheren Spannungen dienen, die Intensität des Schreibflecks ungeheuer gesteigert. Die kathodenoszillographische Technik der Aufnahme von Kennlinien bei Spannungsstößen muß deshalb darin bestehen, den Schreibfleck nur allein während des kurzen Stoßvorgangs den Leuchtschirm oder Film beeinflussen zu lassen, vor- und nachher aber ihn zu sperren; dies läßt sich nur mit genau einsetzenden elektrostatischen Sperrvorrichtungen durchführen, denn selbst bei schnell arbeitenden mechanischen Verschlüssen (z. B. Schieberblende nach Rogowski) würde wegen des hier nicht außerhalb, sondern *auf* dem Film selbst liegenden Endflecks die Kennlinie stark überstrahlt werden.

Dieser kurze Hinweis auf die Untersuchungen an festen Halbleitern, die ich im Elektrotechnischen Institut in Aachen durchführte, dürften auch für physikalische Kreise von Interesse sein. Sie waren der Anlaß, die folgenden Untersuchungen an Elektrolyten anzustellen, zu denen mich Herr Geheimrat M. Wien und Herr Prof. Rogowski im Sommer 1934 anregten.

Überblick der Elektrolytuntersuchung

Die zur Untersuchung des Wieneffektes von mir angewandte neue Methode beruht ebenfalls auf der kathodenoszillographischen Niederschrift der Stromspannungskennlinie des Elektrolyten. Mit Rücksicht auf die geringen Abmessungen des zu untersuchenden Flüssigkeitswiderstandes, der außerdem noch stark kapazitätsbehaftet ist, konnte es sich, wie Vorversuche lehrten, nicht um unmittelbare Übernahme der bei festen Halbleitern benutzten Anordnung handeln. Die Zeitdauer der Niederschrift mußte wesentlich verringert werden, damit wurde auch die Schriftstärke des Oszillogramms weit geringer. Die schließlich angewandte Untersuchungsart, bei der eine normale Ausführung der Rogowskischen Bauart des Kathodenoszillographen benutzt wurde, bestand im Vergleich der Kennlinie eines möglichst kapazitäts- und induktionsfreien Manganinwiderstandes mit der eines Elektrolyten, dessen Widerstandswert in üblicher Weise bei niedriger Spannung in der Kohlrauschbrücke auf den gleichen Widerstandswert abgeglichen war. Bevor auf die Ergebnisse eingegangen wird, seien kurz einige Einzelheiten über die verwandten Hilfsmittel und die Anordnung vorausgeschickt.

wellenschalters und des Auftretens der Wanderwelle in der 100-m-Leitung, die elektrostatische Sperrung frei. Es war noch eine magnetische Relaisnachsperrung vorhanden, die vor völligem Wiederaufladen der Zeitkreisspannungsquelle und damit der Sperrplatten den Kathodenstrahl nach 10^{-3} sec von neuem sperrte und damit auf Schirm oder Film den Endfleck auslöschte, der sonst bei der außerordentlichen Schreibintensität des Strahles die Aufnahme stark, vielleicht bis zur Unkenntlichkeit, überstrahlt hätte. Die große, trotz geringen Strahlstromes vorhandene Energiedichte des sehr kleinen Schreibflecks wurde durch den bekannten Aachener Kunstgriff der Strahlvorkonzentrierung im Entladungsrohr und durch zwei Hauptkonzentrationsspulen am Ablenkrohr erreicht.

Stoßspannungsanlage und Meßanordnung

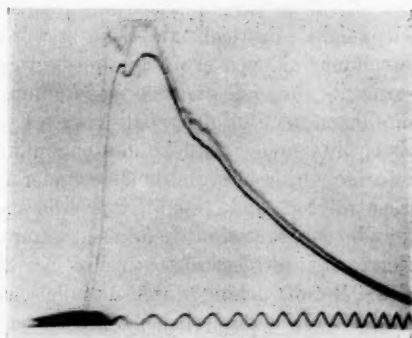
Die Angleichung der äußeren Versuchsanordnung an den zu untersuchenden Elektrolyten verlangte einen geringeren Energieinhalt des Spannungsstoßes. Man hätte, wie ich feststellte, dies mit der üblichen Stoßkapazität auch durch entsprechend niedrige Querwiderstände am Ende der Wanderwellenleitung zustande bringen können; damit wäre zwar die Stoßdauer, aber auch die Spannungshöhe stark vermindert worden. Die schließlich als zweckmäßig erkannte Stoßanordnung bestand aus einer kleineren Stoßkapazität von 8000 cm, die gebildet wurde durch 2 Sätze von je 4 Schottschen Minos-Flaschen zu je 4000 cm. Beide Kapazitäten waren symmetrisch zum Wanderwellenschalter angeordnet, so daß bei der Reihenschaltung durch ihn die resultierende Kapazität 8000 cm betrug. Die Stoßkapazitäten wurden durch Glühventilgleichrichter in Grätzschaltung zu Spannungen zwischen 15 und 30 kV aufgeladen, je nach Größe der zu untersuchenden Widerstände, wobei die große Spannung für die kleinen Widerstände gilt. Die Wanderwellenleitung selbst war durch Überbrückung der den Glühventilen abgewandten Seite der Kapazitäten mit einem hochohmschen Widerstand von 1 Megohm im stationären Fall spannungsfrei. Diese Anordnung, die meist bei Wanderwellenuntersuchungen gebräuchliche, hatte gegenüber einer früher von mir angewandten Schaltung den Vorteil, daß man Umschaltungen an den Prüfobjekten im spannungsfreien Zustand vornehmen konnte und daß außerdem durch einfaches Umschalten auch die zeitabhängige Aufnahme des am Elektrolyten liegenden Spannungsstoßes vor sich gehen konnte. An den Anfang der gegen Erde gleichmäßig isolierten Einzelleiter der 100-m-Doppelleitung waren je ein induktionsfreier Widerstand von halbem Wellenwiderstand eingeschaltet, also im ganzen $2 \times Z/2$. Hierdurch wird auch bei dieser

kleinen Stoßkapazität erreicht, daß am Ende der zunächst als offen zu betrachtenden 100-m-Doppelleitung eine Sprungwelle entsteht, d. h. eine Welle, die mit steiler Front in etwa 10^{-8} sec auf den Wert der Ladespannung der Kondensatoren springt, dann aber konstante Höhe, d. h. „unendlich langen Rücken“ hat, wie sich durch Aufnahme zeitabhängiger Kurven mit sehr langsamer Zeitablenkung (großes $C_t \cdot R_t$) bestätigt. Ohne die Wellenwiderstände $2 \times Z/2$ würden am Ende der Leitung wanderwellenmäßige Einschwingvorgänge auftreten, nämlich zahlreiche, anfänglich zwischen doppelter Spannung und Null schwankende, dann immer stärker gedämpfte Rechteckswellen, bis der stationäre Zustand erreicht wäre. Auch in der endgültigen Anordnung für die Niederschrift der Charakteristik, die wegen der zu vermeidenden Erwärmung des Elektrolyten, verglichen mit den obigen Aufnahmen an festen Halbleitern, in wesentlich kürzerer Zeit vor sich geht, würden solche wanderwellenartigen Restvorgänge zu Verzerrungen (Kringel) gerade am Beginn der Kennlinie führen.

Das Ende der Wanderwellenleitung wird überbrückt durch eine Reihenschaltung des zu untersuchenden Elektrolyten mit einem möglichst induktionsfrei gewickelten unveränderlichen Drahtwiderstand, der als Strommeßwiderstand dient. Zu diesem parallel wurden die oberen Ablenkplatten gelegt, die sonst für die Zeitablenkung benutzt werden, zum Elektrolyten dagegen die ein oder zwei Paar unteren Ablenkplatten, die senkrecht zu ersteren stehen. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, in die Zuleitungen zu den Ablenkplatten, die kapazitätsarme Durchführungen besaßen, Dämpfungswiderstände von etwa 500 Ohm einzuschalten; dadurch wurden hochfrequente Schwingungen unterdrückt, zu denen Ablenkplatten und Zuleitungen angestoßen werden, die zum Teil 75 cm lang sein mußten. Die Zeitkonstante der Ablenkplatten beträgt dann doch kaum 10^{-8} sec, so daß die Aufnahme des wesentlich längeren Vorgangs der Niederschrift der Kennlinie nicht verzerrt wird. Durch Überbrückung des Leitungsendes mit der Reihenschaltung des zu untersuchenden Elektrolyten und des Strommeßwiderstandes wird die vorher beschriebene Form des Spannungsstoßes so geändert, daß ein Spannungsstoß mit abfallendem Rücken entsteht. Dieser Abfall ist um so stärker, je kleiner die Summe der beiden die Wanderwellenleitung am Ende überbrückenden Widerstandswerte ist. Der Maximalwert des Spannungsstoßes dauerte bei den meisten der untersuchten Widerstände etwa $2 \cdot 10^{-6}$ sec. Die Zeitdauer der Einwirkung von Spannungen über $\frac{1}{3}$ des Maximalwertes war der Größenordnung nach 10^{-5} sec. Die nächste Abbildung (Fig. 4) gibt eine zeitabhängige Aufnahme des

Spannungsstoßes an einem Elektrolyten von 203 Ohm, welcher Wert in der Kohlrauschbrücke festgestellt wurde, zugleich aber die etwa darüber liegende Form des Spannungsstoßes an einem an seine Stelle tretenden unveränderlichen Drahtwiderstandes von gleichem Ohmwert. Die Stoßkapazität war in beiden Fällen auf die gleiche Spannung aufgeladen, wie mit einem Starke-Schröder-Voltmeter festgestellt wurde; der Spannungsstoß wurde aber im ersteren Falle beim Elektrolyten infolge des niedrigeren Widerstandswertes für die betreffende Stoßspannung stärker abgedämpft. Aus dem Vergleich der Maximalwerte der Stoßspannungen ergibt sich für einen einzelnen Spannungswert, wie ähnlich früher von W. Fucks¹⁾ beschrieben, ein Maß für die Spannungsabhängigkeit des Elektrolyten und damit

Fig. 4.
Zeitabhängige
Stoßspannungskurven
an einem Drahtwiderstand
von 203 Ohm (oben)
und 203 Ohm Essigsäure
bei 0,25 mm Abstand (unten)
bei maximal 4,5 kV.
Zeitmaßstab $\lambda = 300$ m



zugleich ein kathodenoszillographischer Nachweis des Wieneffektes. Außer diesen beiden Kurven ist noch die Spannungsnulllinie mit eingezeichnet (durch Abnahme der Leitungen zwischen Elektrolyt oder Ersatzdrahtwiderstand nach den Ablenkplatten vom Oszillographen und Vornahme eines willkürlichen Schaltvorgangs); der Nulllinie wurde aber nach Anlegen eines Hochfrequenzsenders von 300 m Wellenlänge an eines der Ablenkplattenpaare eine Zeiteichung überlagert. Man entnimmt daraus die oben angegebenen Werte für die Stoßdauer.

Gefäße für den Elektrolyten; Messung seines Niederspannungswiderstands

Es wurden bei der Untersuchung verschiedene Gefäße benutzt; ab und zu solche, wie sie M. Wien für seine Untersuchungen be-

1) W. Fucks, Ann. d. Phys. 12. S. 306. 1932.

nutzt hat, mit kreisrunden Platinelektroden in festem Abstand, z. B. von 1 mm Abstand, mit platiniierten Elektroden (ohne gelochte Isolierzwischenwand). In den meisten Fällen aber hat sich gerade für die endgültige Ausführung ein Gefäß mit Elektroden von verstellbarem Abstand als zweckmäßig erwiesen, in ähnlicher Form wie es von J. Malsch früher beschrieben wurde¹⁾. Aus Gründen chemischer Reinlichkeit und schnelleren Arbeitens war hier auf Platinierung verzichtet, da auch bei den untersuchten Widerständen, die im allgemeinen zwischen 1000 und 150 Ohm lagen, die Bestimmung des Niederspannungswertes in der Kohlrauschbrücke für die vorliegende Methode sich genügend genau ausführen läßt. Da bei der erhaltenen Strichstärke im Oszillogramm die Auswertung der Kennlinie Genauigkeiten von $\pm 1\%$ ergibt, war auch die Bestimmung des Elektrolytwiderstandes in der Kohlrauschbrücke mit gleicher Genauigkeit ausreichend. Benutzt wurde ein Summer mit der Unterbrechungszahl von etwa 500, der so weit von der eigentlichen Brücke entfernt war, daß er diese weder unmittelbar elektromagnetisch beeinflussen noch infolge schallsicheren Einbaus akustisch stören konnte. Zwei Zweige der Brücke bestanden aus gleichen Rheostatenwiderständen, während die beiden anderen Zweige den zu messenden Elektrolyten und einen Stöpselrheostaten enthielten. Die Widerstände der Präzisionsrheostaten waren mit Wicklungen von kleiner Zeitkonstante ausgerüstet; selbst bei kleineren Elektrodenabständen (bis 0,2 mm) gelang durch Parallelschaltung eines Luftdrehkondensators zum veränderlichen Rheostatenwiderstand eine Abgleichung auf völlig oder nahezu verschwindenden Ton in einem hochohmigen Doppelkopffernhörer, der sich gut bewährte.

Die untersuchten wäßrigen Lösungen wurden unter Verwendung von frisch destilliertem Wasser hergestellt. Es genügte unter Verwendung von Kolben und Kühlern aus Jenaer Glas zweimalige Destillation, um zu Leitfähigkeiten von $1 \div 2 \mu S \text{ cm}^{-1}$ ($= 1 \div 2 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) zu gelangen, die als ausreichend anzusehen sind. Die Feststellung dieser Leitwerte geschah in der eben beschriebenen Summerbrücke meist mit dem auch sonst benutzten Gefäß mit blanken Platinelektroden.

Meßmethode

Die Methode zur Untersuchung des Elektrolyten bestand aus folgenden Einzelschritten: 1. Abgleichung des neu bereiteten Elektrolyten in dem Gefäß mit veränderlichem Elektrodenabstand auf den Widerstandswert eines vorhandenen Drahtwiderstandes, z. B.

1) J. Malsch, Phys. Ztschr. **29**. S. 772. Fig. 2. 1928.

1087 Ohm. Der Abstand der kreisrunden Elektroden konnte an einer Kreisteilung festgestellt werden, wobei Nullstellung (Parallelität beim Berühren der Plattenelektroden) und eingestellte größere Abstände bei dem häufigen Auswechseln des Inhalts, Reinigen der Gefäße und Elektroden und Wiederzusammenschrauben der Apparatur laufend kontrolliert wurden.

2. Der Elektrolyt wird am Ende der Wanderwellenleitung in Reihe mit einen Stromwiderstand, der zweckmäßig hier etwa $\frac{1}{5}$ des zu untersuchenden Widerstandes betrug, eingeschaltet; die Enden des Elektrolyten werden mit den unteren Ablenkplatten, die des Stromwiderstandes mit den Zeitkreis-Ablenkplatten verbunden. Die Wahl des Stromwiderstandes erfolgt so, daß zur günstigen Ausnutzung des Leuchtschirms bzw. des gleichgroßen Films die Kennlinie etwa in dessen Diagonale fällt. Durch die Ablenkspulen des Kathodenoszillographen wird der elektrostatisch gesperrte Kathodenfleck auf die linke untere Ecke des Films als Nullstellung gebracht. Die Kennlinie wird durch willkürliche Betätigung des Wanderwellenschalters von oben rechts diagonal nach dem Nullpunkt zu geschrieben, und zwar mit Spannungen, die dem Rücken des Spannungsstoßes entsprechen, anfangs schneller, gegen den Nullpunkt zu aber immer langsamer. Durch Überlagerung mit Hochfrequenz kann die Zeitdauer der Niederschrift der Kennlinie festgestellt werden. Legt man dann die Anfänge der Zuleitungen zu den beiden Plattenpaaren in einem einzigen Punkt des zu untersuchenden Widerstandes bzw. des Strommeßwiderstandes zusammen, so lassen sich zu der Charakteristik des zu untersuchenden Widerstandes auch die U -Achse und die J -Achse auf den gleichen Film schreiben. Die Schalthandgriffe sind, da die Wanderwellenleitung sofort nach dem Stoß wieder spannungsfrei wird, ohne Gefahr vorzunehmen. Nun wird der Elektrolyt durch den bereitliegenden Drahtwiderstand gleicher Größe ersetzt und auch seine Kennlinie geschrieben; außerdem können nochmals, wie in den beigelegten Figuren nur für feste Halbleiter (Fig. 1 und 2) geschehen, die U - und die J -Achse aufgezeichnet werden, die sich mit den zuerst aufgenommenen in der Richtung decken müssen.

3. Der Elektrolyt wird hiernach sofort bezüglich der Konstanz oder Veränderung seines Widerstandswertes in der Kohlrauschbrücke nachgeprüft.

Ergebnisse

Es war bei der endgültigen Versuchsausführung als unbedingt sicher vorauszusagen, daß bei Elektrolyten ohne feststellbaren Wieneffekt, z. B. bei starken Säuren, die Kennlinie des Drahtwiderstandes

mit der Kennlinie des auf den gleichen Widerstandswert eingestellten Elektrolyten völlig übereinstimmte (vgl. Figg. 5 und 8). Die einzige Unterscheidung war häufig nur möglich durch die Art, wie die Kennlinie einsetzte. Die Kapazität des Elektrolyten (bei 0,2 mm 800 cm!) bedingte im ersten Teil der Kennlinie eine mehr oder weniger große Ausweitung der Kennlinie nach oben, weil zunächst die Kapazität des Flüssigkeitswiderstandes den Ausgleichsstrom leicht durchläßt; der Elektrolyt nimmt verhältnismäßig viel Strom auf, mehr als es seinem Ohmschen Widerstand entspricht. Die Kennlinie für diesen ersten Teil des Ausgleichsvorgangs verläuft daher vom Nullpunkt aus sehr kurzzeitig, zunächst in der Nähe der J -Achse langsam steigend, in einem Bogen gegen den Uhrzeiger in die eigentliche geradlinige Charakteristik hinein, die dann auf den Nullpunkt zurückgeschrieben wird. Nur der Rest dieses Bogens am Beginn des geradlinigen Teils ist meist sichtbar (Figg. 5, 7a, 8), bei größeren Widerständen mehr als bei kleineren (von etwa 200 Ω). Dagegen geschieht das Hineinfahren des Strahles in die Charakteristik des Drahtwiderstandes, dessen Wicklung unifilar auf Hartpapierstücke aufgewickelt ist, wegen der Restinduktivität von der entgegengesetzten Seite, also von der U -Achse her (Fig. 9b). Durch Parallelschaltung von Kapazitäten zu einem solchen Drahtwiderstand ließ sich der Kapazitätsbogen des Elektrolyten künstlich herstellen.

Meine Untersuchungen begann ich mit Salzlösungen, bei denen ein starker Wieneffekt von vornherein auffallen mußte. Ich erwartete zunächst gekrümmte Kennlinien, ähnlich wie bei den festen Halbleitern. Die erhaltenen Charakteristiken hatten aber stets linearen Charakter. Daher eichte ich zur Kontrolle der Anordnung den Oszillographen bei konstanter Strahlspannung und konstanter Stromstärke in den Ablenkspulen wiederholt sorgfältig mit Gleichspannung durch, die an ein oder die zwei unteren Ablenkplattenpaare, dann an die oberen (Zeit-) Ablenkplatten gelegt wurde. Damit wurden senkrechte und waagerechte Strichsysteme erhalten, die zusammen Eichraster ergaben, woraus die Ablenkempfindlichkeiten für beide Koordinaten folgten. Aus den Kennlinien von Drahtwiderständen, die erwartungsgemäß linear waren, ergaben sich aus der vorhergehenden Eichung beim Abgreifen zusammengehöriger Spannungen und Ströme Widerstandswerte, die bis auf 1% mit den in der Summerbrücke gemessenen übereinstimmten. Dann wurden wieder Salzlösungen hergestellt, bei denen ein größerer Effekt zu erwarten war. In der Kohlrauschbrücke wurde an dem Gefäß mit veränderlichem Abstand auf einen Widerstandswert abgeglichen, der einem der vorhandenen Drahtwiderstände ebenfalls bis auf 1% ent-

sprach. Trotz Einhaltung konstanter Strahlspannung, auf die natürlich vor allem stets zu achten ist, deckte sich die Kennlinie des Elektrolyten dann aber nicht mit der Kennlinie des Drahtwiderstandes; sie war trotzdem wie ursprünglich linear, wich aber von dem Drahtwiderstand mehr oder weniger ab und stets nach der Stromachse zu. Da bei der Genauigkeit der Kohlrauschbrücke außerdem derart grobe

Fig. 5. Zusammenfallende Kennlinien eines Drahtwiderstands von 361 Ohm und einer NaCl-Lösung (0,2 mm Abstand; $R_0 = 360 \text{ Ohm}$; $\mathcal{E}_{\text{max}} = 220 \text{ kV/cm}$) Außerdem 6. Stoß danach (bei $\frac{1}{2}$ Abstand) auf NaCl. Stromwiderstand 143 Ohm ohne Parallelkapazität C_J , daher Kapazitätsbogen. Bild H 252.

Auswertung:

$$\begin{aligned} & 42 \text{ mm} \cdot 75 \text{ V/mm} \\ & 50 \text{ mm} \cdot 25 \text{ V/mm} / 143 \text{ } \Omega \\ & \quad = \frac{3150 \text{ Volt}}{8,75 \text{ Amp.}} = 361 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

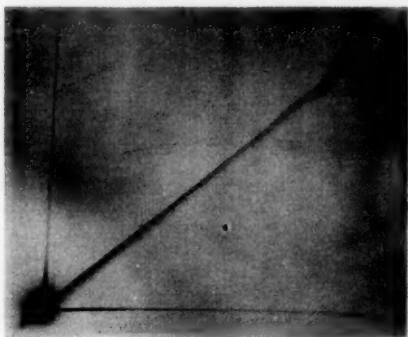
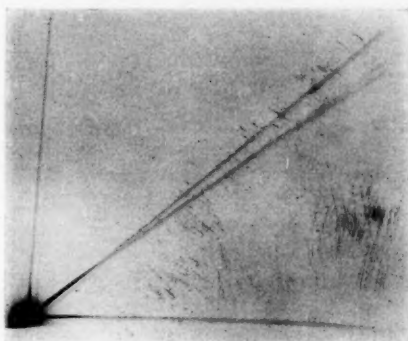


Fig. 6.

Drahtwiderstand von 300 Ohm (oben) u. CuSO_4 -Lösung (0,2 mm Abstand; $R_0 = 300 \text{ Ohm}$; $\mathcal{E}_{\text{max}} = 220 \text{ kV/cm}$ Stromwiderstand mit C_J . Bild H 196



Meßfehler nicht vorliegen konnten, war es jetzt zweifellos, daß trotz der linearen Kennlinie des Elektrolyten hier eine Abweichung vom Ohmschen Gesetz vorlag. Weiter unten werden die Ergebnisse von M. Wien mit diesem experimentellen Befund der Linearität der Kennlinie verglichen.

Um über die Größe der Abweichung vom Ohmschen Gesetz Klarheit zu erhalten, war es also notwendig, die Charakteristik der Salzlösung wegen ihrer Geradlinigkeit stets mit der eines Draht-

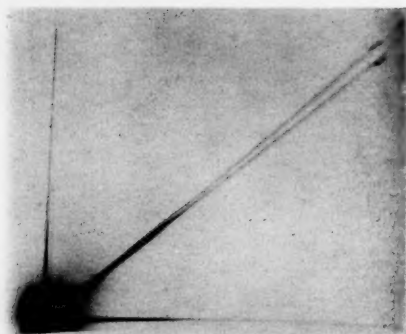


Fig. 7 a.

$\text{Ba}_2\text{Fe}(\text{CN})_6$ -Lösung 1 mm Abstand; $R_0 = 720 \text{ Ohm}$;
 $\mathcal{E}_{\text{max}} = 45 \text{ kV/cm}$; Bild H 133;
 (ohne C_J)

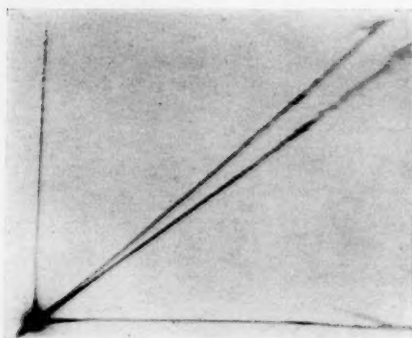


Fig. 7 b.

$\text{Ba}_2\text{Fe}(\text{CN})_6$ -Lösung 0,2 mm Abstand; $R_0 = 240 \text{ Ohm}$;
 $\mathcal{E}_{\text{max}} = 220 \text{ kV/cm}$; Bild H 128
 (mit C_J)

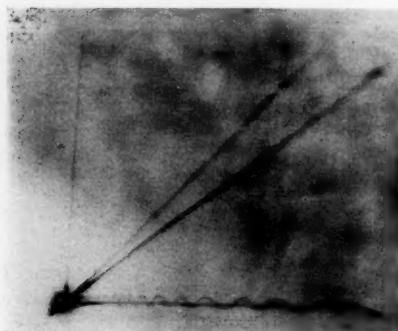


Fig. 7 c.

$\text{Ba}_2\text{Fe}(\text{CN})_6$ -Lösung 0,2 mm Abstand; $R_0 = 170 \text{ Ohm}$;
 $\mathcal{E}_{\text{max}} = 200 \text{ kV/cm}$; auch 3. Stoß auf Elektrolyten; J -Achse überlagert mit $\lambda = 300 \text{ m}$. Bild H 222
 (mit C_J)

Fig. 8.

Zusammenfallende Kennlinien
von 361 Ohm Drahtwiderstand
und HCl-Lösung (0,2 mm Ab-
stand; $R_0 = 360$ Ohm;
 $\mathcal{E}_{\max} = 220$ kV/cm). Stromwider-
stand 115 Ohm ohne C_J , daher
Kapazitätsbogen. Bild H 188.

Auswertung:

$$\frac{42 \text{ mm} \cdot 75 \text{ V/mm}}{40 \text{ mm} \cdot 25 \text{ V/mm}}$$

$$115 \Omega$$

$$= \frac{3150 \text{ Volt}}{8,69 \text{ Amp.}} = 363 \Omega$$

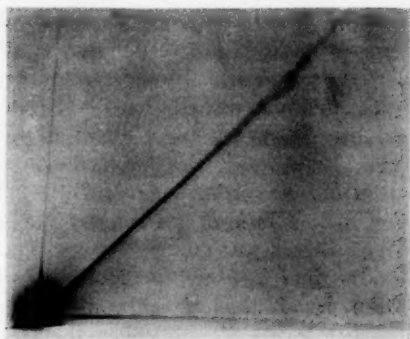


Fig. 9a.

Propionsäure; 0,5 mm Abstand;
 $R_0 = 330$ Ohm; $\mathcal{E}_{\max} = 90$ kV/cm.

Bild H 182 (ohne C_J)

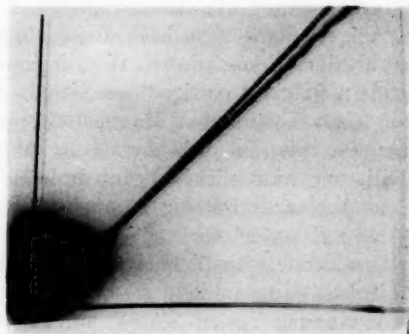
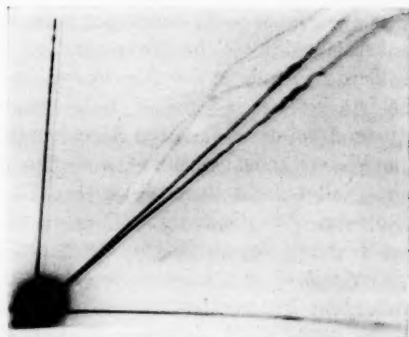


Fig. 9b.

Propionsäure; 0,25 mm Abstand;

$$R_0 = 217 \text{ Ohm};$$

$\mathcal{E}_{\max} = 180$ kV/cm. Bild H 184
(mit C_J)



widerstandes gleicher Größe, für niedrigere Spannung gemessen, zu vergleichen. Nach dieser kathodenszillographischen Kennlinienmethode ließ sich dann in kurzer Zeit die von Wien 1927 klargestellte Abhängigkeit seines Elektrolyteffektes von dem Produkt der Wertigkeit von Anion und Kation bestätigen. NaCl-Lösungen hatten nur eine geringe, kaum feststellbare Abweichung ihrer Kennlinien von denen zugehöriger Drahtwiderstände (Fig. 5); deutlich bemerkbar waren die Abweichungen bei CuSO_4 (Fig. 6), noch mehr bei $\text{Ba}_3 \cdot [\text{Fe}(\text{CN}_6)_2]$ und noch größer war die Abweichung bei $\text{Ba}_2[\text{Fe}(\text{CN}_6)]$ (Fig. 7a—c).

Die hier beschriebene Methode wird bei der endlichen Strichstärke des Kathodenstrahls auf dem Film nicht die Genauigkeit erreichen lassen, die schließlich M. Wien und seine Mitarbeiter durch Ausbau der Einfunkenmethode von einer Ausschlagsmethode zu einer Nullmethode erreicht haben; mit den weiteren Verfeinerungen, die Wien und Schiele anwandten, kamen sie sogar unter 1‰ Meßgenauigkeit. Die neue kathodenszillographische Kennlinienmethode hat aber den Vorteil, daß sie nicht in einer Reihe von Einzelmessungen, sondern in einer einzigen Aufzeichnung die Spannungsabhängigkeit von einer bestimmten Maximalfeldstärke bis zur Feldstärke Null herunter mit einem Schlag, d. h. mit einem Spannungsstoß, feststellt, und zwar nicht als Integraleffekt, sondern durch kontinuierliche Aneinanderreihung zusammengehöriger Einzelwerte. Bei dem Gefäß mit veränderlichem Abstand war es bei Anwendung der Spannungsablenkempfindlichkeit von 75 V/mm (bei 2 Paar unteren Ablenkplatten parallel), die bei der Filmgröße $6,5 \times 11 \text{ cm}$ eine Ablenkspannung bis zu $4,5 \text{ kV}$ am Elektrolyten anzulegen gestattet, möglich, bei der kleinen Stoßkapazität und Abständen von $0,2 \text{ mm}$ ohne Störungen durch Erwärmungen oder gar Durchschläge zu Maximalfeldstärken von 220 kV/cm zu gelangen, Werte, über die man auch sonst nicht wesentlich hinausgekommen ist. Für die gleiche Substanz, also gleiche Konzentration, konnte man außerdem durch größere Einstellung der Elektroden das Verhalten auch bei kleineren Feldstärken noch genauer feststellen; z. B. kann man bei 1 mm Abstand bei der genannten Ablenkempfindlichkeit des Oszillographen die Widerstandsänderungen zwischen der Feldstärke von 45 kV/cm und Null aufschreiben lassen (Fig. 7a). Ein besonderer Vorteil ist, daß man über die am Elektrolyten wirklich liegende Spannung aus der Eichung des Oszillographen genau Bescheid weiß, während man bisher mit einer mittleren, errechneten Spannung zu tun hatte, die außerdem Funkenstreckenmessungen entnommen ist mit ihrer für kurze Stöße nicht einfachen Berücksichtigung der Verzögerung.

Weiterhin kann man sich über die Größe des Wärmeeffektes nach einfacher Umschaltung durch Aufnahme der zeitabhängigen Kurven des Spannungsstoßes Klarheit verschaffen. Ich möchte bemerken, daß man sich auch ohne Aufnahme dieser Kurven über seinen Einfluß einfach dadurch Klarheit verschaffen kann, daß man die Kennlinie in kurzen Abständen von $\frac{1}{2}$ bis 1 Min. wiederholt aufschreibt und nachprüft, ob Abweichungen vorhanden sind. Bei Widerständen von etwa 1000 Ohm und 1 mm Abstand spielte der Wärmeeffekt bei 10 aufeinanderfolgenden Stößen in diesem Zeitabstand, wie Aufnahmen des 1., 2. und 10 Stoßes ergaben, keine Rolle, da sich die Kurven vollständig deckten und auch kein Unterschied vorhanden war gegenüber einer anfänglich mit kleinerer Stoßspannung aufgenommenen Kennlinie, die nur deshalb erkenntlich war, weil der Kapazitätsbogen in der Mitte der übrigen Kennlinie einsetzte (vgl. ferner die Figg. 5 und 7c).

Außer den Salzen wurden auch Säuren untersucht. Sie bestätigten einmal die auch nach den bisherigen theoretischen Auffassungen zu erwartenden Ergebnisse, daß starke Säuren infolge der leichten Beweglichkeit des H-Ions bis zu der allgemein angewandten Höchstgrenze von 220 kV/cm keine Abweichung vom Niederspannungswert ergaben, d. h. beide Kennlinien des Drahtwiderstandes und der starken Säuren stimmten völlig überein. Wie schon vorher erwähnt, ist die Entscheidung nur möglich durch die Art, wie der Strahl in die gemeinsame, sich deckende Kennlinie hineinfährt. Es sei noch bemerkt, daß man den Kapazitätsbogen dort, wo er stört, insonderheit bei noch kürzeren Stößen als hier im allgemeinen angewandt, dadurch zum Verschwinden bringen kann, daß man eine entsprechende Kapazität C_j (Öldrehkondensator) parallel zum Stromwiderstand R_j legt, also die Elektrolytkapazität kompensiert. Der Kapazitätsbogen ist im übrigen um so stärker ausgeprägt, je größer der Widerstand des Elektrolyten ist, da der Einschwingvorgang ja von der Zeitkonstante des Elektrolytwiderstandes abhängig ist.

Weiter wurden noch nachgeprüft die auf Veranlassung von M. Wien von Herrn J. Schiele¹⁾ untersuchten *schwachen organischen Säuren*. Die Oszillogramme bestätigten sehr gut die theoretisch zunächst unerwarteten Ergebnisse von Hrn. Schiele, daß nämlich diese schwachen Carbonsäuren einen vergleichsweise sehr starken Spannungseffekt zeigen, der im übrigen im Gegensatz zu den Salzlösungen eine kontinuierliche Leitfähigkeitszunahme mit der Feldstärke zeigt. Die Kennlinien dieser organischen Säuren haben also

1) J. Schiele, Ann. d. Phys. [5] 13. S. 811. 1932.

schon etwas silitartigen Charakter und sie weichen von dem zugehörigen Drahtwiderstand mit wachsender Feldstärke immer mehr ab, wenngleich die Krümmung der Charakteristiken selbst bei den höchsten Feldstärken nur schwach angedeutet ist, bei kleinen Feldstärken aber ist die Abweichung im Gegensatz zu den Salzen verhältnismäßig gering.

Wenn mir in Aachen nach Auffindung des hier geeigneten Verfahrens zur Untersuchung der Elektrolyte auch nur kurze Zeit (von 2 Wochen) noch zur Verfügung stand, habe ich doch in 130 Filmaufnahmen folgende Elektrolyte, z. T. in verschiedener Konzentration und zu wiederholten Malen, auch bei verschiedenen angesetzten Lösungen, untersuchen können: NaCl , CuSO_4 , $\text{Ba}_3(\text{FeCN}_6)_2$, $\text{Ba}_2[\text{Fe}(\text{CN})_6]$, HCl , H_2SO_4 , KOH , NH_3 , Essigsäure, Propionsäure, Weinsäure, Zitronensäure und außerdem das von Herrn J. Malsch, Köln, nach der Einfunkennullmethode untersuchte *Kolloid Cetylpyridiumchlorid*¹⁾, von dem Herr Malsch mir eine Probe freundlichst zur Verfügung stellte. Hier handelte es sich bei höheren Feldstärken um Leitfähigkeitszunahmen von 45%.

Kennlinien aus Ergebnissen der Einfunkennmethode

Da die Deutung der geradlinigen Kennlinie einer Salzlösung als Abweichung vom Ohmschen Gesetz erfahrungsgemäß und verständlicherweise Schwierigkeit macht, sei noch an zwei Beispielen experimenteller Ergebnisse von M. Wien und J. Schiele gezeigt, daß diese mit den erhaltenen Kathodenoszillogrammen in Übereinstimmung sich befinden. Als Beispiel für einen Salzelektrolyten sei eine $\text{Ba}_2[\text{FeCy}_6]^{'''}$ -Lösung bei der Niederspannungsleitfähigkeit $\kappa = 4,6 \cdot 10^{-5} = 46 \mu\text{S cm}^{-1}$ gewählt, das von M. Wien (Ann. d. Phys. [5] 1. S. 405. 1929) angeführt wird. In dem von mir benutzten Gefäß von 18 mm Elektrorendurchmesser und 0,2 mm Abstand hat dann der Elektrolyt (bei isolierten Rückseiten der Elektroden) den Niederspannungswiderstand $R = 171 \text{ Ohm}$. In der Strom-Spannungs- (J, U) -Ebene geht die zugehörige Widerstandsgerade vom Nullpunkt nach dem Punkt 4000 Volt; 23,4 Amp., entspricht also einem unveränderlichen Drahtersatzwiderstand von 171 Ohm. Nach M. Wien wird für 200 kV/cm, d. h. hier für 4000 Volt, die Widerstandsabnahme $-\frac{\Delta R}{R} = 12,9\%$, also für 4000 Volt wird der Strom um 12,9% höher, d. h. 26,4 Amp. In der folgenden Tabelle sind auch die anderen Wienschen Meßwerte der ersten beiden Kolonnen für die UJ -Ebene umgerechnet.

1) J. Malsch u. G. S. Hartley, Ztschr. f. Phys. Chemie, A; 170. S. 321 bis 336. 1934; vgl. auch J. Schiele, Phys. Ztschr. 34. S. 61. 1933.

\mathcal{E} in kV/cm	$-\frac{\Delta R}{R}$ in %	U in Volt	J Draht in Amp.	J Lösung in Amp.
200	12,9	4000	23,4	26,4
180	12,5	3600	21,1	23,7
160	12,0	3200	18,8	21,0
140	11,3	2800	16,5	18,4
120	10,6	2400	14,1	15,6
100	9,7	2000	11,7	12,8
80	8,8	1600	9,4	10,2
60	7,4	1200	7,1	7,6

Neben der Widerstandsgeraden 171 Ohm sind die Werte für U und J der Lösung in Fig. 10 als \odot eingetragen. Sie liegen auf einer Geraden, deren Verlängerung die positive U -Achse bei einem kleinen

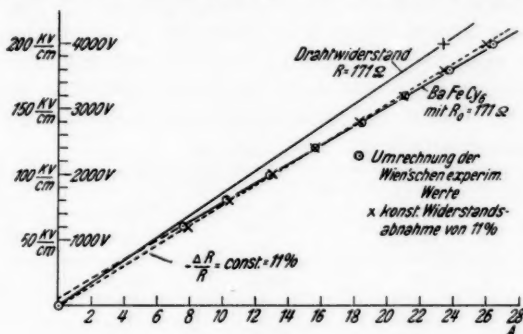


Fig. 10

Wert schneidet; die Kennlinie hat also einen schwachen Knick, da der Anfang sicher mit der Drahtkennlinie zusammenfällt. Eine durchgehende Widerstandserniedrigung um 11% für den ganzen Feldstärkenbereich würde die eingezeichnete zweite Gerade durch den Nullpunkt ergeben (die Einzelpunkte sind mit \times bezeichnet). Daß der Knick im Oszillogramm kaum oder meist nicht erkennbar ist, dürfte auf einen Einfluß des Wärmeeffekts zurückzuführen sein, der gegen Ende des Vorgangs, also gegen den Nullpunkt, seinen größten Wert erreicht, während er bei höheren Feldstärken, in der UJ -Ebene, also oben rechts, auch bei kleinsten Elektrodenabständen rechnungsmäßig noch innerhalb der Meß- und Ablesefehler liegt.

Wie aus den beiden ersten Kolonnen hervorgeht, nimmt die Widerstandsabnahme bei Salzlösungen mit wachsender Feldstärke immer weniger zu und nähert sich einem festen Wert; es ergibt sich der Wiensche „Grenzeffekt“ bei Salzlösungen, der seine Erklärung

durch die Theorien von Debye-Hückel-Falkenhagen und Onsager gefunden hat: die interionischen Kräfte (elektrophoretischer Effekt und Relaxationseffekt der Ionenwolke) werden durch die hohen Feldstärken immer mehr aufgehoben.

Wie die Untersuchungen von J. Schiele ergaben, liegt bei den schwachen Säuren und Basen im Gegensatz zu den normal sich verhaltenden starken Vertretern ihrer Klasse wider Erwarten ein übermäßig hoher Wieneffekt vor, und der Wert von $-\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \kappa}{\kappa}$ wächst außerdem noch bis zu den praktisch erreichbaren Feldstärken dauernd etwa linear an. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den bis jetzt untersuchten Kolloiden.

Wählt man als Beispiel Propionsäure von der Leitfähigkeit $\kappa = 2 \cdot 10^{-4}$ nach J. Schiele (Ann. d. Phys. [5] 15. S. 822, Fig. 8. 1932), so würde der Elektrolyt in dem Gefäß mit gleichen Abmessungen wie vorher einen Niederspannungswert $R = 39,3$ Ohm haben. Der Drahtersatzwiderstand geht durch den Punkt 4000 Volt; 101,5 Amp. Wie in obiger Tabelle sind die Schieleschen Ergebnisse in die UJ -Ebene umgerechnet:

\mathcal{E} in kV/cm	$-\frac{\Delta R}{R}$ in %	U in Volt	J_{Draht} in Amp.	$J_{\text{Lösung}}$ in Amp.
200	12	4000	101,5	113,7
150	8,5	3000	76	82,5
100	4,6	2000	50,5	52,8
50	1,8	1000	26,5	27,0

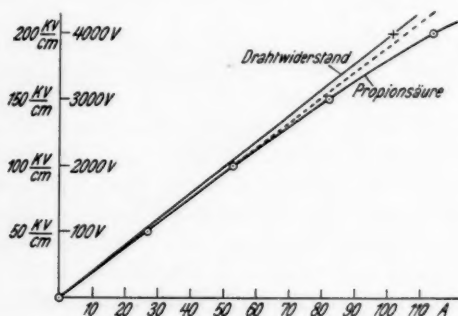


Fig. 11

In der Fig. 11 sind neben dem Drahtwiderstand 39,3 Ohm, die für Propionsäure sich ergebenden Werte als \odot eingetragen. Man sieht, daß die Abweichung von der Widerstandsgeraden mit wach-

sender Spannung im Gegensatz zu den Salzen immer größer wird und die Kennlinie schon etwas gekrümmt ist in Übereinstimmung mit dem kathodenzosillographischen Befund.

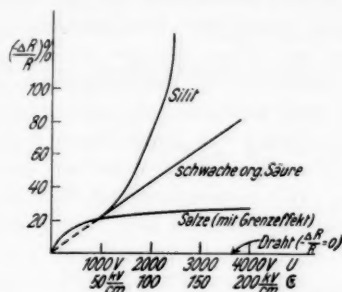


Fig. 12

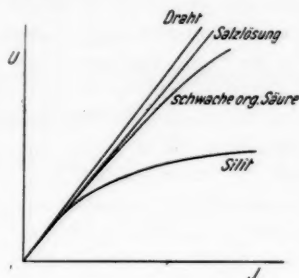


Fig. 13

Schematisch sind in den folgenden beiden Kurven (Figg. 12 u. 13) links die $\left(-\frac{\Delta R}{R}\right)$ -Werte als Funktion der Feldstärke für Salze, schwache (organische) Säuren und Silite aufgetragen, rechts die entsprechenden Kennlinien in der UJ -Ebene.

Zusammenfassung

Die im Text bereits erwähnten, beigegebenen Oszillogramme sind verkleinerte Kopien, die Originale lassen noch größere Feinheiten erkennen und sind sehr sauber geschrieben. Es handelt sich zunächst um einige Salzlösungen: 1. NaCl bis zur maximalen Feldstärke 220 kV/cm (Fig. 5); 2. CuSO_4 unter gleichen Verhältnissen (Fig. 6); 3. $\text{Ba}_2\text{Fe}(\text{CN})_6$, und zwar: Fig. 7a für maximale Feldstärke von 45 kV/cm, in Fig. 7b für 220 kV/cm und schließlich in Fig. 7c für eine stärkere Lösung bis zu 200 kV/cm. Die größere Divergenz ist im letzteren Falle zwischen Drahtcharakteristik und Elektrolytkennlinie deutlich erkennbar. In Fig. 8 unterscheidet sich die Charakteristik für HCl bis zu 220 kV/cm nicht von der des Drahtwiderstandes, und in den beiden Figg. 9a und 9b wird für Propionsäure für verschiedene Feldstärke die Charakteristik wiedergegeben. Weitere Einzelheiten, auch in 2 Fällen die Art der Auswertung, sind bei den Figuren selbst aufgeführt.

Die vorliegenden Beispiele zeigen, daß die Methode der Aufnahme von Kennlinien von Elektrolytwiderständen eine sehr gute Bestätigung der von M. Wien und seinen Schülern gefundenen Ergebnisse auf neuem Wege gibt und den Wieneffekt kathoden-

oszillographisch für den in Frage kommenden Feldstärkenbereich überzeugend vor Augen führt. Die verschiedene Größe des Effekts und die Art seiner Gesetzmäßigkeit mit wachsender Feldstärke läßt sich mit einem Blick sofort übersehen. Methodisch hat die neue Untersuchungsart den Vorteil, statt in zahlreichen Einzelmessungen, die aber nur Integraleffekte liefern, mit einem Schlage von einem maximalen Feldstärkenwert ab den ganzen Verlauf der Abweichungen vom Ohmschen Gesetz niederzuschreiben und ohne jede rechnerische Annahmen die in Frage kommenden Größen von Spannungen, Feldstärken, Stromstärken und damit Widerstandsänderungen aus dem Oszillogramm abgreifen zu können. Die Genauigkeit der Methode dürfte bei größeren Effekten durchaus ausreichend sein, wenngleich Genauigkeiten, wie sie Wien und seine Mitarbeiter bei der Nullmethode schließlich erhalten haben, kathodenszillographisch nicht möglich sein werden. Die Abweichungen vom Ohmschen Gesetz haben sich für leitende Flüssigkeiten bei Anwendung höherer Spannungen als viel ausgedehnter erwiesen, als zu erwarten war. Nach dem zuerst gefundenen und theoretisch auch erklärbaren Wieneffekt an Salzlösungen hat er sich auch in neuen Gebieten unerwartet als vorhanden herausgestellt, wie bei den schwachen organischen Säuren, bei Kolloidlösungen, während eine große Zahl fester Halbleiter aus anders gearteten Gründen ja auch Abweichungen vom Ohmschen Gesetz zeigen. Zur systematischen Durchforschung weiterer Gebiete dürfte die hier beschriebene Methode eine wertvolle Ergänzung der bisherigen sein, da man bei Übung in kathodenszillographischer Technik nach meinen Erfahrungen auch rasch mit ihr arbeiten kann.

Hrn. Geheimrat M. Wien habe ich zu danken für Anregung und Anteilnahme an dem Fortschreiten der vorliegenden Untersuchung sowie für die Überlassung der meisten Chemikalien, Hr. Prof. W. Rogowski für seine freundliche Bereitstellung der Mittel seines Instituts.

Aachen, Elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 18. Juli 1935)

Über Rückdiffusion und Sekundärstrahlerregung langsamer Kathodenstrahlen an dünnen Metallschichten

Von H. W. Langenwalter

(Mit 15 Figuren)

Einleitung

Literaturübersicht¹⁾

Schickt man Elektronen bestimmter einheitlicher Geschwindigkeit auf eine Metalloberfläche, so wird ein Teil von ihnen ohne Energieverlust reflektiert, ein anderer Teil mit Energieverlust rückdiffundiert. Außerdem treten sekundäre Elektronen auf, die von den primären aus der bestrahlten Schicht ausgelöst werden. Diese sekundären Elektronen sind im allgemeinen durch eine geringe Geschwindigkeit ausgezeichnet, wie es zuerst von Lenard²⁾ gezeigt und dann von Becker³⁾ in einer Reihe von Arbeiten näher untersucht worden ist. Bemerkenswert war hier insbesondere die weitgehende Unabhängigkeit der sekundären Geschwindigkeit von der Primärstrahlenergie; erst bei erheblichen Werten der letzteren nimmt die wahrscheinlichste Austrittsgeschwindigkeit der Sekundärelektronen Werte an, die einige Volt wesentlich übersteigen⁴⁾.

1) Zusammenfassende Darstellungen: P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelberg 1918 u. 1925; P. Lenard u. A. Becker, Kathodenstrahlen, Handbuch der Experimentalphysik XIV. 1927. Negative und positive Strahlen, Handbuch der Physik XXII. 2. 1933; O. Klemperer, Einführung in die Elektronik 1933. S. 165ff.; A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen I. S. 108ff. 1932; vgl. auch den Bericht von A. Becker, Korpuskularstrahlen I in „Die Physik“ 2. S. 2. 1934.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 15. S. 505. 1904; vgl. auch Quantitatives über Kathodenstrahlen, 1918. S. 157.

3) A. Becker, Ann. d. Phys. 17. S. 427. 1905; 78. S. 228, 253. 1925.

4) A. Becker, Ann. d. Phys. 17. S. 427. 1905; 78. S. 253. 1925; K. H. Stehberger, Ann. d. Phys. 86. S. 825. 1928.

Die Mehrzahl der Arbeiten anderer Autoren¹⁾ unterscheidet zum Schaden des Verständnisses trotz der frühen und sorgfältigen Begriffsbildung durch Lenard²⁾ meist nicht zwischen rückdiffundierten (primären) und sekundären Elektronen und betrachtet im allgemeinen die Gesamtheit aller austretenden Elektronen als „Sekundäremission“.

Diese Messungen des Ganges der *Gesamtemission* mit der erzeugenden Spannung ergeben nach anfänglich raschem, un stetigem Anstieg oberhalb einer vom Metall abhängigen Spannung [z. B. bei Al 35 Volt³⁾] eine die auffallende Primärmenge übersteigende Anzahl austretender Elektronen, die bei einer charakteristischen „optimalen“ Geschwindigkeit [wenige 100 Volt³⁾] einen maximalen Wert [ungefähr 2mal der Primärmenge³⁾] erreicht, um dann langsam wieder abzunehmen. Man kann daraus gut ersehen, daß nur ein kleiner Teil der primär aufgewandten Energie wieder zum Vorschein kommt, da ja die meisten Elektronen mit nur geringer Geschwindigkeit austreten.

Beiträge zum tieferen Verständnis der Erscheinung konnten hierher gehörige Arbeiten erst dann liefern, als sie im Anschluß an die genannten ersten Untersuchungen von Lenard und Becker zur Durchführung von Geschwindigkeitsanalysen übergingen. Solche haben Baltruschat und Starke⁴⁾ und Farnsworth⁵⁾ im zentralen Gegenfeld, das alle Emissionsrichtungen zusammennimmt, ausgeführt. Weitere Messungen von Farnsworth⁶⁾ mit Zentralfeld, von Sharman⁷⁾ in sinnreicher Differentialgegenfeldschaltung sowie verschiedener Verfasser⁸⁾, die sich magnetischer Geschwindigkeitsanalyse bedienen, zeitigen im großen und ganzen untereinander sehr ähnliche Ergebnisse.

1) O. v. Baeyer, Phys. Ztschr. 10. S. 176. 1909; N. R. Campbell, Phil. Mag. 22. S. 176. 1911; 24. S. 527. 1912; 25. S. 803. 1913; 28. S. 293. 1914; 29. S. 369. 1915; P. Copeland, Phys. Rev. 35. S. 982. 1930; H. E. Farnsworth, Phys. Rev. 20. S. 358. 1922; 25. S. 41. 1925; 27. S. 413. 1926; 31. S. 405. 1928; A. Gehrts, Ann. d. Phys. 36. S. 995. 1911; A. W. Hull, Phys. Rev. 7. S. 1. 1916; H. E. Krefft, Ann. d. Phys. 84. S. 639. 1927; Phys. Rev. 31. S. 199. 1928; L. A. Mc Allister, Phys. Rev. 20. S. 110. 1922; 21. S. 122. 1923; R. L. Petry, Phys. Rev. 26. S. 346. 1925.

2) P. Lenard, Q. über K. a. a. O. S. 133.

3) Vgl. Engel-Steenbeck, a. a. O. Tabelle S. 111.

4) M. Baltruschat u. H. Starke, Phys. Ztschr. 23. S. 403. 1922.

5) H. E. Farnsworth, Phys. Rev. 20. S. 358. 1922.

6) H. E. Farnsworth, Phys. Rev. 27. S. 413. 1926; 31. S. 405. 1928.

7) C. F. Sharman, Proc. Cambr. Phil. Soc. 23. S. 922. 1927.

8) J. B. Brinsmade, Phys. Rev. 30. S. 494. 1927; C. F. Sharman, Proc. Cambr. Phil. Soc. 23. S. 523. 1927; E. Rudberg, K. Sv. Vet. Akad. Handl. 7/1, S. 2. 1929; Th. Solter, Phys. Rev. 36. S. 1212. 1930.

Im allgemeinen ergibt sich, daß die *Art* der Verteilung der austretenden Elektronen weder von der Primärgeschwindigkeit (wie schon ursprünglich gefunden), noch vom verwendeten Metall stark abhängt. Sharman¹⁾ findet, daß die Erzeugung sekundärer Elektronen mit sinkender Atomnummer zurückgeht.

Von ganz anderer Größenordnung sind die Abweichungen, die durch Zustandsänderungen der Schicht in bezug auf Unreinheit oder Gasbeladung verursacht werden. Als erster bemerkte Campbell²⁾ den beträchtlichen Einfluß verschiedener Schichtbehandlung. Weiterhin hat insbesondere Krefft³⁾ dieser Erscheinung eine recht eingehende Untersuchung gewidmet. In der Geschwindigkeitsverteilung machen sich die Einflüsse starker Schichtbeheizung in einer beträchtlichen Verminderung des sekundären Anteils geltend⁴⁾, der bei besonders lang und weit getriebener Erhitzung fast völlig verschwinden kann⁵⁾. Daß die Temperatur selbst keinen unmittelbaren Einfluß auf die Ergebnisse ausübt, haben McAllister⁶⁾ und Tingwaldt⁷⁾ gezeigt.

Man hätte erwarten können, daß die diskreten Energiestufen der beschossenen Atome irgendwie in den Kurven in Erscheinung treten. Doch haben erst sehr sorgfältige Untersuchungen von Petry⁸⁾ und vor allem von Krefft⁹⁾ deutliche Knicke in der Gesamtemissionskurve (als Funktion der Primärspannung) finden lassen, die bei Erhitzung teils erst auftreten, teils wieder verschwinden und mit den kritischen Potentialen des Metalls oder des absorbierten Gases in Verbindung^{10, 11)} gebracht werden können¹²⁾. Bei der Geschwindigkeitsverteilung hat nur die für Auffindung einzelner Gruppen sehr

1) C. F. Sharman, Proc. Cambr. Phil. Soc. **23**. S. 523. 1927.

2) N. Campbell, Phil. Mag. **28**. S. 293. 1914; **29**. S. 372. 1915.

3) H. E. Krefft, Ann. d. Phys. **84**. S. 639. 1927; Phys. Rev. **31**. S. 199. 1928.

4) C. F. Sharman, Proc. Cambr. Phil. Soc. **23**. S. 928. 1917; Th. Soller, Phys. Rev. **36**. S. 1216. 1930.

5) Th. Soller, a. a. O. S. 1216.

6) L. A. McAllister, Phys. Rev. **20**. S. 110. 1922; **21**. S. 122. 1923.

7) C. Tingwaldt, Ztschr. f. Phys. **34**. S. 280. 1925.

8) R. L. Petry, Phys. Rev. **26**. S. 346. 1925.

9) H. E. Krefft, a. a. O. S. 205.

10) H. E. Krefft, Ann. d. Phys. **84**. S. 639. 1927; Phys. Rev. **31**. S. 199. 1928.

11) O. W. Richardson u. F. C. Chalklin, Proc. Roy. Soc. A **110**. S. 247. 1926; **119**. S. 84. 1928.

12) Vgl. den Bericht bei Rudberg, K. Svensk. Vet. Akad. Handl. 7/1. S. 137. 1929.

günstige magnetische Analyse in den Händen von Rudberg¹⁾ und das magnetisch-photographische Verfahren von Brown und Whiddington²⁾ die Existenz charakteristischer Energieverluste zutage gefördert. Dabei sind die vorkommenden Verluste dem Metall selbst [z. B. bei Platin 9 Volt³⁾, bei Silber 3,9 Volt⁴⁾] oder dem aufgenommenen Gas [Sauerstoff 8 Volt⁵⁾ u. a.] zuzuschreiben.

Rudberg⁶⁾ hat auch, allerdings mit negativem Erfolg, versucht, eine die diskreten Übergänge begleitende Strahlung im Außenraum aufzufinden. Nur bei sehr hoher Stromdichte ($4\text{--}5 \text{ Amp./cm}^2$) vermögen Elektronen sehr geringer Geschwindigkeit ($2\text{--}20 \text{ Volt}$) eine entsprechende Bremsstrahlung nachweisbar auszulösen^{7, 8)}.

Der sekundäre Anteil erweist sich auch bei näherer Untersuchung als strukturlos und muß als Endergebnis einer statistischen Verteilung angesehen werden.

Überraschenderweise zeigt sich die Geschwindigkeitsverteilung, wie Becker in einer Reihe schöner Untersuchungen⁹⁾ zur Kenntnis brachte, fast unabhängig von der Art ihrer Erzeugung, ob durch Elektronen oder α -Strahlen, ob durch glüh- oder lichtelektrische Wirkung hervorgerufen, was auf ähnlichen Entstehungsmechanismus hinweist. Weiter hat Rudberg¹⁰⁾ zeigen können, daß auch die durch die Kohlenstoff-K-Strahlung erregte Geschwindigkeitsverteilung sehr nahe mit der durch Elektronen der entsprechenden Energie (275 Volt) erzielten übereinstimmt. Der Mechanismus der Emission ist dadurch allerdings noch nicht klargelegt. Über die zahlreichen Möglichkeiten seines Ablaufes haben sich Richardson¹¹⁾ und Rudberg¹²⁾ eingehend ausgelassen, ohne zu einer Entscheidung kommen zu können.

Problemstellung

Die gegenwärtige Untersuchung will zu einer weiteren Klärung dadurch beitragen, daß sie durch eine systematische Geschwindig-

1) E. Rudberg, K. Svensk. Vet. Akad. Handl. 7/1. S. 102. 1929; Proc. Roy. Soc. A 127. S. 111. 1930; Phys. Rev. 45. S. 764. 1934.

2) D. Brown u. R. Whiddington, Proc. Leeds Phil. Lit. Soc. 1. S. 162. 1927.

3) E. Rudberg, K. Svensk. Vet. Akad. Handl. 7/1. S. 130. 1929.

4) E. Rudberg, Phys. Rev. 45. S. 764. 1934.

5) D. Brown u. R. Whiddington, a. a. O. S. 164.

6) E. Rudberg, Proc. Roy. Soc. A 129. S. 652. 1930.

7) F. L. Mohler u. C. Boeckner, Bur. Stand. Journ. of Res. 6. S. 673. 1931; 7. S. 751. 1931.

8) C. Boeckner, Bur. Stand. Journ. of Res. 9. S. 583. 1932.

9) A. Becker, Ann. d. Phys. 75. S. 250, 791. 1924; 60. S. 30. 1919.

10) E. Rudberg, K. Svensk. Vet. Akad. Handl. 7/1. S. 69ff. 1929.

11) O. W. Richardson, Proc. Roy. Soc. A 119. S. 531. 1928.

12) E. Rudberg, K. Svensk. Vet. Akad. Handl. A 121. S. 421. 1928.

keitsanalyse die einzelnen Teilerscheinungen streng getrennt verfolgt, insbesondere das Gebiet relativ kleiner Primärgeschwindigkeiten berücksichtigt und hier zu einer Meßgenauigkeit vordringt, die die bisher erreichte wesentlich überragt. Das Schwergewicht der vorliegenden Arbeit liegt dabei, im Gegensatz zu den meisten der erwähnten Veröffentlichungen, auf der Bestimmung der Veränderung der Geschwindigkeitsverteilung mit dem *Gasgehalt* der Schichten.

Zur Meßmethodik

Das zu unsern Messungen benutzte Verfahren ist das der Spannungsmessung, wie es ursprünglich von Lenard¹⁾ 1902 angewandt worden ist. In seiner Ausführung bedienen wir uns der von Becker²⁾ angegebenen Modifikation, bei welcher der zu untersuchende Strahl in völlig feldfreiem Raum zur Ausbildung gelangt und erst nach Durchsetzen einer Netzblende in den Bereich des analysierenden Gegenfeldes tritt. Dieses Vorgehen gewährleistet weitgehende Freiheit von störenden Feldern, während ein gleiches bei den Zentralfeldmessungen von Farnsworth³⁾ nicht ohne weiteres gegeben scheint.

Das Verfahren der Spannungsmessung ist im Gegensatz zu den differentialen Methoden (magnetische Ablenkung) apparativ recht einfach und erlaubt vor allem, auch bei nur geringer Gesamtmenge (also besonders im Gebiet kleiner Primärgeschwindigkeiten) noch recht sichere Messungen. Allerdings ist es der Feststellung nur gering ausgeprägter Geschwindigkeitsgruppen weniger günstig. Hierfür ist dann die Anwendung der mittels Ablenkung analysierenden Verfahren unerlässlich.

Versuchsanordnung

Den Aufbau des Versuchsrohres zeigt Fig. 1. Im Rohrteil I werden von einem an dem Gühkopf *G* befestigten thorierten Wolframdraht Elektronen erzeugt und durch das Feld zwischen *G* und *B*₁ beschleunigt. Der Elektronenstrahl durchsetzt nacheinander drei koaxiale Blenden und trifft im zentralen Teil des Rohres unter einem Einfallswinkel von 70° auf die zu untersuchende Schicht *S* auf, die auf ein Quarzplättchen aufgestäubt ist, das von der Rückseite durch einen zweiten Wolframdraht geheizt werden kann. Scheibchen und W-Draht sind auf dem Heizkörper *H* montiert, der mittels Schliff II

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. S. 149. 1902.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 253. 1925.

3) H. E. Farnsworth, Phys. Rev. 20. S. 358. 1922; 25. S. 41. 1925; 27. S. 413. 1926.

entfernt werden kann (auf der Photographie, Fig. 2, gesondert von oben zu sehen). Der zentrale Versuchsraum ist durch den Messing-

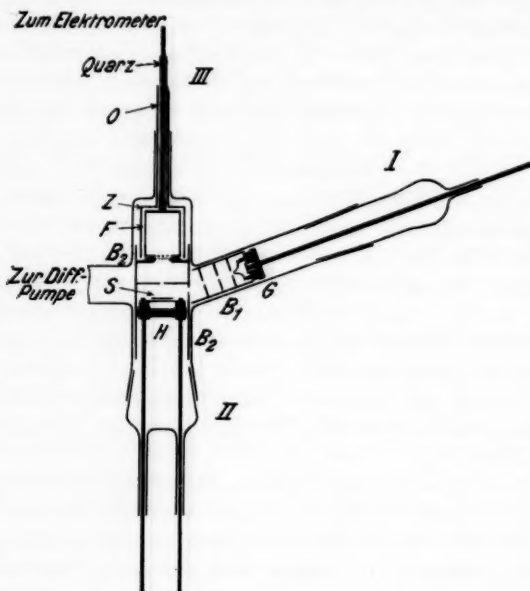


Fig. 1. Aufriß des Versuchsrohres

zylinder B_2 feldfrei gehalten. Von den die Schicht verlassenden Elektronen werden die normal zur Oberfläche abgehenden ausgeblendet und gelangen nach Durchlaufen des zwischen B_2 und F angelegten Gegenfeldes im Faradaykäfig F mittels eines Quadrantelektrometers zur Messung.

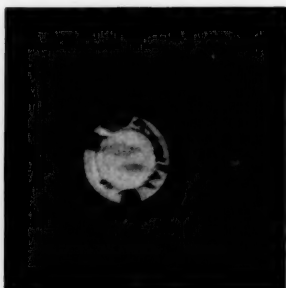


Fig. 2.

Teil II von oben gesehen.
Ag-Schicht auf Quarzscheibe
über Ausheizdraht montiert

Vor dem Zusammensetzen des Rohres wurden alle Metallteile sorgfältig berußt und in der Bunsenflamme ausgeheizt. Die Kittungen Metall-Glas wurden mit Schellack und weißem Siegelack gedichtet, die Schlitze mit Leyboldschem Apiezon sparsam gefettet. Zur weitgehenden Entfernung schädlicher Dämpfe befand sich in

nächster Nähe des Versuchsraumes eine geräumige Tasche, die mit flüssiger Luft gekühlt wurde.

Die Pumpanlage bestand aus einer zweistufigen Stahldiffusionspumpe nach Gaede, die auf ein durch eine rotierende Ölpumpe bedientes Vorvakuum arbeitete. Quecksilberdämpfe wurden in geräumiger Falle mit flüssiger Luft ausgefroren. Die Güte des Vakuums konnte mit einem MacLeodmanometer geprüft werden. Der Druck blieb unter 10^{-5} mm Hg.

Der zur Schichtbehandlung benötigte Wasserstoff wurde durch ein am Versuchsrohr angeschmolzenes Palladiumröhrchen erhalten, das bei Rotglut genügende Mengen dieses Gases aus der Flamme des Bunsenbrenners in den Versuchsraum diffundieren ließ.

Durch vergleichende Versuche erwies sich die Kompensation des Erdfeldes als unnötig.

Schaltung

Beschleunigende Primärspannung E_p und verzögernde Gegenfeldspannung E_g wurden an getrennten Akkumulatorbatterien kleinerer Kapazität abgegriffen, mittels Potentiometern eingestellt und mit Präzisionsvoltmetern, die nach einem Normalinstrument geeicht wurden, dauernd gemessen. Heizkopf H und Schicht S befanden sich mit B_1 und B_2 auf gleichem Potential. Zur Beheizung der Schicht konnte der Heizfaden unter ihr an eine 20-Volt-Batterie großer Kapazität gelegt werden. Das Elektrometer befand sich immer auf Erdpotential. An H , B_1 , B_2 lag also jeweils das eingestellte Potential E_g , am Glühfaden das Potential $E_u = E_p - E_g$ gegenüber Erde. Diese „Unter“-spannung E_u konnte zur Prüfung ebenfalls gemessen werden. Sie gibt den Betrag des Geschwindigkeitsverlustes, den die Elektronen höchstens erlitten haben dürfen, wenn sie noch zur Messung gelangen sollen.

Meßweise

Die Aufnahme der Kurven geschah durch sogenannte Zickzackmessung: Jede Messung bei bestimmter Gegenspannung E_g wurde zwischen zwei Messungen der Gesamtmenge der senkrecht austretenden Elektronen bei 0 Volt Gegenspannung eingeschlossen. Anfängliche Versuche hatten ergeben, daß selbst Elektronen so langsamer Geschwindigkeit (< 100 Volt) durch ihren Aufprall den Zustand der Schicht mit der Zeit veränderten. Es wurde daher darauf verzichtet, den Glühfaden dauernd zu heizen. Doch erlaubte das angegebene Verfahren, zuverlässige Messungen auch dann zu erhalten, wenn nur der Gang der Emission genügend konstant blieb. Über die erzielte Meßgenauigkeit vgl. die nachfolgenden Kurven.

Bei den Messungen an beheizten Schichten wurde wie folgt verfahren. Aus verschiedenen Gründen konnte die Beheizung nur während der Meßpausen vorgenommen werden. Sie dauerte meist je 60 Sek. und endete 5 Sek. vor Beginn jeder Einzelmessung, die insgesamt 3 Min. in Anspruch nahm. Während genau eines Drittels der Versuchsdauer wurde also ausgeheizt. Guter Strahlungsschutz und die Wärmeträgheit der Quarzscheibe ließen einen ausgleichenden Einfluß erwarten, wie ihn eine spätere Untersuchung auch tatsächlich bestätigte.

Versuchsergebnisse

Messungen an Silber

Die ersten Ergebnisse wurden an dünner, im Vakuum aufgedampfter Silberschicht erhalten. Da diese im wesentlichen mit denen der gründlicheren Untersuchungen an Platin übereinstimmen, andererseits aber wegen der geringeren Beständigkeit der Silberschichten (vgl. die deutlichen Strahlspuren auf der Photographie, Fig. 2) weniger hohe Genauigkeit beanspruchen, verweisen wir bezüglich dieser Messungen auf die Heidelberger Dissertation.

Messungen an Platin

Eine bessere Beständigkeit war von Platin zu erwarten, das auf das Quarzplättchen in dünner, doch nicht mehr durchscheinender Schicht kathodisch aufgestäubt wurde. Eine solche Schichtdicke verhindert sicher einen störenden Einfluß der Unterlage, da bei den allein benutzten geringen Primärgeschwindigkeiten die Strahlabsorption im Metall eine sehr hohe ist¹⁾ (vgl. S. 293). Bei den Primärgeschwindigkeiten 94, 80, 60, 40, 30, 20, 15, 12,5, 11 und 9 Volt (unterhalb der letzteren reichte die Elektronenmenge zur Messung nicht mehr aus) wurden Gegenspannungsmessungen an kalter Schicht vorgenommen. Die erhaltenen Ergebnisse sind in den Figg. 3 und 4 zusammengetragen.

Der allgemeine Kurvenverlauf gleicht dem bereits bei Silber gefundenen. Bei allen Primärgeschwindigkeiten ist ein ziemlich starker Abfall der Kurven mit von 0 Volt an wachsender Gegenspannung festzustellen. Es gibt somit eine große Menge sehr langsamer Elektronen mit einer häufigsten Geschwindigkeit von 2 bis 3 Volt, wie dies bereits von Becker²⁾ gefunden ist. Der weiterhin immer flachere Verlauf der Kurven macht kenntlich, daß Elektronen größerer Geschwindigkeit um so seltener auftreten, je rascher sie

1) A. Becker, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 249. 1929.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 270. 1925.

sind. Endlich weisen vor allem die bei kleinen Primärgeschwindigkeiten gewonnenen Kurven unterhalb der höchsten emittierten Geschwindigkeit ein beinahe oder völlig waagerechtes Teilstück auf, das ein mehr oder minder vollständiges Fehlen von Elektronen des

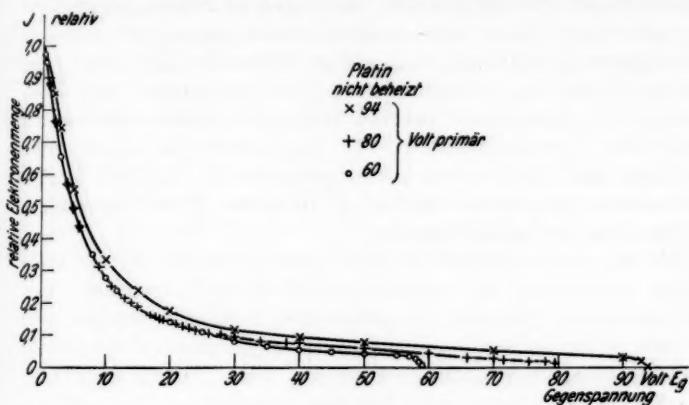


Fig. 3.

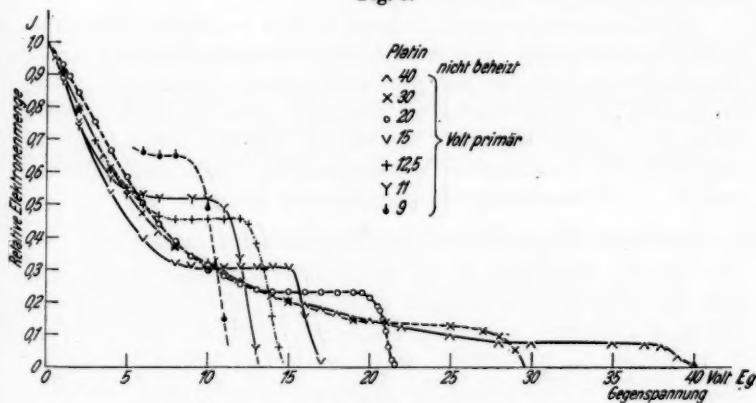


Fig. 4.

Gegenspannungskurven an nicht beheizter Platinschicht

zugehörigen Geschwindigkeitsgebietes anzeigt. Wenn man von der Kurve bei 9 Volt Primärspannung, deren Meßwerte wegen ungenügender Intensität etwas unsicher sind, absieht, muß man als besonders auffällig bemerken, daß bei kleinen Primärgeschwindigkeiten die Breite des waagerechten Bereichs unabhängig von der angewandten Primärspannung stets 5—6 Volt beträgt; oder auch mit andern

Worten: *Elektronen mit Geschwindigkeitsverlusten unter 5–6 Volt sind nicht anzutreffen*. Als Beispiel sei angeführt, daß die 20-Volt-Kurve in einem Intervall von 5,5 Volt der Gegenspannung um nicht 0,1% absinkt.

Zwar zeigen schon Beckers¹⁾ Messungen an reinem, ausgeglühtem Platin (vgl. Fig. 6) eine deutliche Scheidung in reflektierten und langsamen Anteil; doch wird *völliges Fehlen* der Elektronen des Zwischengebietes bei geringen Primärgeschwindigkeiten hier zum erstenmal an Gegenspannungskurven festgestellt, während solches an differentialen Verteilungskurven von Rudberg²⁾ in seiner sehr sorgfältigen und inhaltreichen Arbeit gefunden ist. Sollers³⁾ Differentialmessungen ergeben dagegen am erhitzten Metall keine restlose Trennung der beiden Anteile.

Wie uns unsere übrigen Beobachtungen nahelegen, ist die vollständige Ausbildung der „Geschwindigkeitslücke“ ursächlich mit einem besonderen Zustand der unbeheizten Schicht verknüpft, der nicht sehr stabil ist und vermutlich allein schon durch Beschießung mit etwas schnelleren Elektronen zerstört wird. Daraus würde es sich erklären, daß diese Lücke bei den verschiedenen Beobachtern verschieden deutlich gefunden wird.

Der Anteil der elastisch gestreuten, ohne merklichen Geschwindigkeitsverlust wieder emittierten Elektronen wird durch den steilen Endabfall dargestellt, der sich dem waagerechten Verlauf der Kurven in den Figg. 3 und 4 unmittelbar anschließt. Die verschiedene Höhe dieses Kurventeils zeigt somit an, daß der elastisch gestreute Anteil der senkrecht ausgesandten Gesamtmenge — kurz der „Primäranteil“ — mit wachsender Primärspannung abnimmt.

Primäranteil als Funktion der Primärspannung

Um den Primäranteil der Elektronen in seiner Abhängigkeit von der Primärgeschwindigkeit systematisch zu verfolgen, wurde mit fest eingestellter Unterspannung $E_u = 2$ Volt, das ist $E_g = E_p - 2$ Volt, an unbeheizter Platinschicht die relative emittierte Menge bei den verschiedensten Primärgeschwindigkeiten bestimmt. Es gelangten dabei also alle Elektronen zur Messung, deren Geschwindigkeitsverluste unter 2 Volt lagen.

Die Zusammenstellung dieser Beobachtungen in Fig. 5 läßt einen glatten Kurvenzug erscheinen, der keinerlei deutliche Ungleichmäßigkeiten aufweist. Bei hohen Primärgeschwindigkeiten (100 Volt) be-

1) A. Becker, ebenda, S. 264.

2) E. Rudberg, K. Svensk. Vet. Akad. Handl. 7/1. S. 122. 1929.

3) Th. Soller, Phys. Rev. 36. S. 1215. 1930.

trägt der Primäranteil wenige (2,5) Prozent der Gesamtmenge, nimmt mit sinkender Primärspannung zuerst langsam, dann rascher zu, um unterhalb 20 Volt primär stark zu wachsen. Die noch verbleibende (sehr geringe) Streuung der Werte läßt sich trotz aller Sorgfalt nicht ganz vermeiden. Sie rührt von einer durch die Beschießung bedingten Veränderung der Schicht her und macht sich in einem allmählichen, sehr geringfügigen Absinken der Werte im Laufe längerer

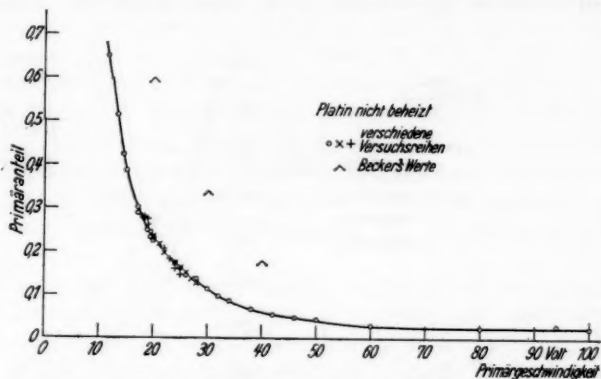


Fig. 5. Primäranteil als Funktion der Primärspannung

Versuchsdauer geltend. Zum Vergleich sind die von Becker¹⁾ mit gleicher Versuchsanordnung an reinem, ausgeglühtem Platin gefundenen Werte eingezeichnet (^) (vgl. hierzu auch S. 284 unten).

Beheizungsversuche

Der im vorstehenden merkbare Einfluß der Schichtbeschaffenheit auf den Elektronenaustritt wird bei künstlicher Veränderung des Schichtzustandes besonders deutlich. Wir verfolgten diese Verhältnisse am Vergleich des gesamten Kurvenverlaufs für unbeheizte und beheizte Schicht, wobei sich im wesentlichen ein Gaseinfluß zu erkennen gibt, der an den (noch nicht mit höchster Genauigkeit gemessenen) Kurven der Fig. 6 besonders gut zutage tritt. (Die einzelnen Phasen der Versuchsfolge sind aus der beigefügten Tabelle zu ersehen.) Man erkennt folgendes: Der im Verlauf der Versuche sich vermindern den Kühlwirkung entspricht ein bedeutendes Sinken der Meßwerte, vor allem eine beträchtliche Abnahme des elastisch gestreuten Anteils (auf 70%), während die sehr langsamen Elektronen (um 2 Volt) bevorzugt auftreten (Kurve b). Für dieses Verhalten

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 272. 1925.

kann zusätzliche Streuung an dem infolge mangelnder Kühlung anwesenden Gas oder Dampf im freien Versuchsraum seiner doch geringen Dichte wegen nicht verantwortlich gemacht werden. Man muß vielmehr die Kurve *b* einer durch das ungenügende Vakuum bedingten Änderung des Metallschichtzustandes zuschreiben, die in verstärkter Beladung mit Gasen oder Dämpfen bestehen kann. Die unter den gewöhnlichen Bedingungen an kalter Schicht gewonnene „Normal“-Kurve *c* liegt wieder höher und bietet das bekannte

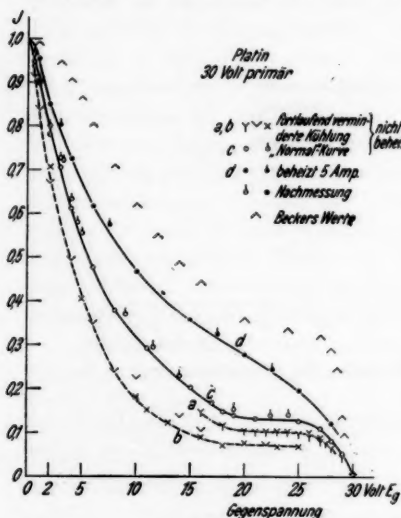


Fig. 6.

Gegenspannungskurven bei verschiedenartiger Schichtbehandlung

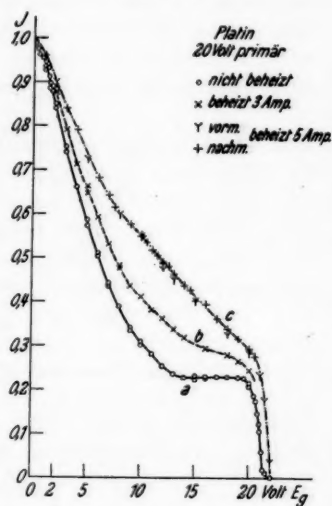


Fig. 7.

Bild. Beheizung der Schicht ergibt die auch an Silber gefundene starke Verlagerung (*d*) der Geschwindigkeitsverteilung, die im folgenden eingehend untersucht ist.

Die Messungen der Fig. 6 zeigen jedenfalls zur Genüge, wie sehr konstant die Versuchsbedingungen zu halten sind, wenn man reproduzierbare Kurven gewinnen will. Zum Vergleich und als Beispiel dafür, daß das Variationsbereich der Kurven mit den angezogenen Versuchsänderungen keineswegs erschöpft ist, sind in der Fig. 6 noch die Meßpunkte Beckers¹⁾ eingetragen (\wedge), die er in gleicher Versuchsanordnung an reinem, ausgeglühtem Platin bei derselben Primärspannung gefunden hat. Seine durchweg höheren Werte bei ähnlichem Gesamtverlauf weisen auf noch anderen Schichtzustand hin.

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 264. 1925.

Sorgfältig und eingehend wurde bei 20 Volt Primärspannung die Wirkung verschiedener Beheizung auf die Geschwindigkeitsverteilung untersucht. Dabei tritt eine recht erhebliche Änderung der Kurvenform zutage. Die ausgezogene Kurve (a) der Fig. 7 gehört nichtbeheizter Schicht an, während die gestrichelte (b) und die strichpunktierte (c) Kurve an der mit 3 bzw. 5 Amp. je 60 Sek. lang beheizten Schicht gewonnen wurden. Das gänzlich waagerechte Teilstück der untersten Kurve (a) zeigt eine besonders vollständige Ausbildung der Geschwindigkeitslücke zwischen 14 und 19,5 Volt Gegenspannung an. Elektronen dieses 5,5 Volt breiten Bereichs werden also von der unbeheizten Schicht überhaupt nicht emittiert, während sie bei Beheizung der Schicht deutlich auftreten, wie die dauernde Neigung der oberen Kurven (b und c) erkennen läßt. Der durch die Beheizung erzielte Ordinatenanstieg bedeutet ein erhebliches Zurücktreten der langsamen Elektronen zugunsten schnellerer und offenbar gerade derjenigen, die bei gashaltiger Schicht fehlen.

Die durch die Kreise zwischen 0 und 1 Volt Gegenspannung angedeutete Inflexion läßt sich nicht unbedingt als reell ansprechen. Dagegen muß die eigenartige Form der Kurven a und b in der Gegend von 11 Volt Gegenspannung beachtet werden. Beide zeigen hier eine etwas geringere Krümmung als ober- und unterhalb, die auf bevorzugtes Auftreten von Elektronen im Bereich dieser Geschwindigkeit hinweist. Noch deutlicher wird eine solche Struktur der Verteilungskurve aus den Messungen ersichtlich, die bei verstärkter Beheizung der Schicht mit 5 Amp. unter sonst gleichen Bedingungen erhalten sind (Kurve c). Die erzielte weitere Änderung der Verteilung ist vor allem im mittleren Teil sehr deutlich zu sehen. Zur Erkennung der Meßgenauigkeit sind in Kurve c zwei unabhängige Meßreihen desselben Tages eingetragen. Die ein klein wenig höhere Lage der zur späteren Zeit erhaltenen Werte (stehende Kreuze) gibt zu erkennen, daß sich selbst im Laufe langer Versuchsdauer der Zustand der Schicht immer noch, wenn auch nur geringfügig, ändert.

Zur weiteren und genaueren Prüfung dieses Verhaltens wurde eine wiederholende Messung unter den gleichen Bedingungen (20 Volt primär, Beheizung je 60 Sek. mit 5 Amp.), jedoch mit systematischer Anordnung der Meßpunkte vorgenommen.

Während sonst im allgemeinen die Gegenspannung eine regellose Variierung über den gesamten Bereich erfuhr, wurde sie in diesem Versuch (Fig. 8) um je 0,5 Volt fortschreitend eingestellt; und zwar ging die Messung zuerst von 10,0 bis 22,5 Volt E_g (+) und wieder zurück von 22,25 bis 10,25 Volt (○) vor sich, dann wurde von 10 Volt abwärts bis 1 Volt (×) und wieder aufwärts von 0,25 bis 7 Volt E_g (●) beobachtet. Die erhaltenen Werte sind in Fig. 8 eingetragen.

Die Genauigkeit der Messung ist so groß, daß auch noch die erwähnten kleinen zeitlichen Gänge deutlich in Erscheinung treten. Dabei ist die Reproduzierbarkeit des Gesamtverlaufs der Kurven außerordentlich befriedigend: Ein Übereinanderlegen der Figg. 7

und 8 zeigt völlige Deckung innerhalb der geringen zeitlichen Abweichung.

Dieses günstige Ergebnis veranlaßte den Versuch, den Einblick in die Geschwindigkeitsverteilung durch Differentiation der

beobachteten Integralkurve zu vertiefen. Neben zwei ausgesprochenen Maxima, die dem primären Anteil bei 20 Volt und dem sekundären Anteil bei etwa 2,5 Volt entsprechen, lassen sich in der Integralkurve noch drei weitere Buckel bei 6 bis 7, 12 und 16 Volt E_g erkennen, die aber nur wenig hervortreten. Doch kann die Existenz der schon an den Kurven *a* und *b* der Fig. 7 bemerkten Gruppe bei 12 Volt E_g

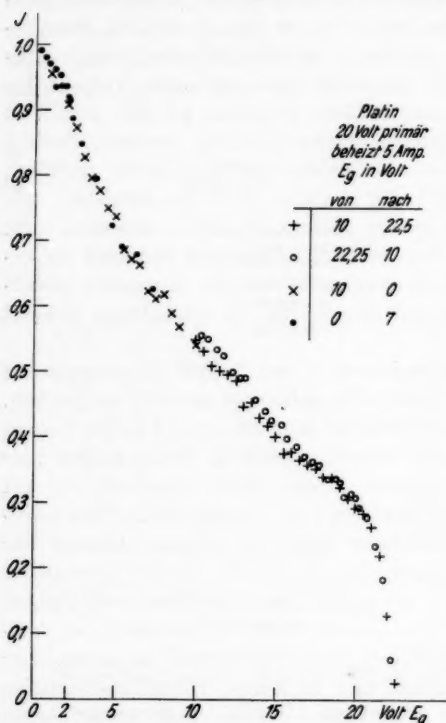


Fig. 8.
Systematische Anordnung der Meßpunkte

nicht gut gelegnet werden. Sie ist ziemlich breit und entspricht Elektronen, die im Mittel 9 Volt an Energie verloren haben. Daß bei Platin tatsächlich ein Geschwindigkeitsverlust von sehr genau diesem Betrag vorzugsweise auftritt, hat Rudberg¹⁾ mit Hilfe magnetischer Analyse überzeugend nachweisen können.

Um solche geringen Selektivitäten näher zu verfolgen, wurden in nur kleinem Gegenspannungsbereich recht zahlreiche Messungen

1) E. Rudberg, K. Svensk. Vet. Akad. Handl. 7/1. S. 130. 1929.

vorgenommen. Wie man aus der Fig. 9 ersieht, bringen zwei unter völlig gleichen Bedingungen beobachtete Reihen keinen rechten Erfolg. Zwar findet man zwischen 6 und 7 Volt E_g so etwas wie eine Stufe angedeutet, doch ist die Streuung von fast gleicher Größe.

Der den schnellsten Elektronen entsprechende Bereich wurde ebenfalls einer eingehenden Untersuchung unterzogen. In Fig. 10 kommt die völlige Abwesenheit von Elektronen unterhalb 19 Volt E_g besonders gut zum Ausdruck. Die zwischen 19 und 20 Volt merklich schwächere Neigung der Kurve bei ziemlich geringer Krümmung

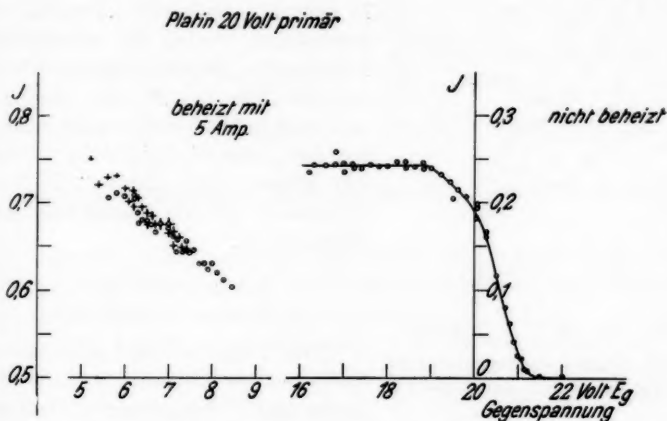


Fig. 9.

Fig. 10.

Eingehende Messungen in kleinem Gegenspannungsbereich

würde die Existenz einer besonderen Gruppe in diesem Gebiet anzeigen. Doch ist nicht zu sagen, ob dafür unsymmetrische Verteilung der primären Elektronen oder ein sehr geringer Energieverlust in der Schicht verantwortlich gemacht werden kann.

Da sich persönliche Fehler (z. B. ungleiche Aufladedauer des Elektrometers) bei genügender Übung und Sorgfalt weitgehend vermeiden lassen, wird die vor allem in Fig. 9 in Erscheinung tretende Genauigkeitsgrenze unserer Messungen hauptsächlich durch die Inkonstanz des Schichtzustandes und der Primärintensität bestimmt. Wenn die letztere jeweils gleichzeitig mit der Schichtemission gemessen würde, könnten in den Kurven Einzelheiten des Verlaufes ebenso wie ihre zeitlichen Änderungen auch mit Hilfe der Gegenspannungsmethode noch besser verfolgt werden.

Messungen an Palladium

Zur Untersuchung von Gaseinflüssen schien Palladium besonders geeignet. Verwendung fand hier zunächst ein Stück dünnen Bleches aus diesem Material, das an Stelle des Quarzplättchens im Rohr eingespannt wurde. Die entsprechenden Messungen (nichtbeheizt und be-

heizt mit 5 Amp. je 60 Sek.) ergeben das bereits von den Platinverteilungen her bekannte Bild (Fig. 11). Die der unbeheizten Schicht zugehörige Kurve *a* zeigt sehr deutlich die Geschwindigkeitslücke zwischen 11 und 16 Volt E_g , sowie den ziemlich beträchtlichen Anteil an sekundären Elektronen mit der häufigsten Geschwindigkeit um 2 Volt. Die der beheizten Schicht entsprechende Kurve *b* liegt, ganz wie bei Platin, wesentlich höher. Die „Lücke“ ist verschwunden und der Sekundärteil hat abgenommen.

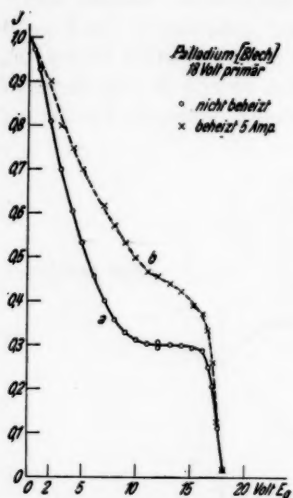
Zeitlicher Einfluß
des Beheizungsverfahrens

Fig. 11. Gegenspannungsmessungen an beheiztem und nichtbeheiztem Palladium

Die Tatsache der bedeutenden Änderung der Kurvenform durch die rückseitige Temperaturbestrahlung der Schicht forderte eine nähere

Untersuchung der Wirkungsweise verschiedenartiger Beheizung während einer Einzelmessung, da, wie schon erwähnt, während der Aufladezeit des Elektrometers nicht beheizt werden konnte.

An einer Platinschicht wurden bei 20 Volt Primär- und 12 Volt Gegenspannung (hier war die durch die Beheizung erzielte Änderung der Ordinatenwerte am größten) zwei Meßreihen durchgeführt. Genau alle 3 Min. ging eine Einzelmessung vor sich. Die Stromstärke im Beheizungsdraht betrug durchweg 3 Amp. Bei der ersten Meßreihe wurde die Heizdauer variiert: Beheizung 0, 60, 30, 15, 0 Sek. lang, das ist während 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, 0 der Versuchszeit. Immer 5 Sek. nach Heizende begann die Aufladung des Elektrometers; mit andern Worten: die „Pause“ zwischen Heizende und Meßbeginn dauerte stets 5 Sek. Das Ergebnis zeigt Fig. 12. In der zweiten Versuchsreihe wurde bei einer konstanten Heizzeit von jeweils 60 (von insgesamt 180) Sek. die Pause geändert: Sie dauerte

erst 5, dann 80, dann wieder 5 Sek. Die Beheizung wurde also das eine Mal (5 Sek. Pause) kurz vor Beginn, das andere Mal (80 Sek. Pause) kurz nach Ende der Elektrometeraufladung betätigt. Die zu Anfang und Ende dieser Reihe zum Vergleich bestimmten Werte an unbeheizter Schicht sind in die das Ergebnis darstellende Fig. 13 mit eingezeichnet.

Die einzelnen Phasen der Versuche finden sich in den Kurven deutlich wieder. Unmittelbar nach Einsetzen der Beheizung steigt

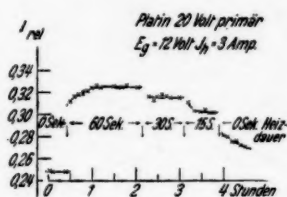


Fig. 12.

Einfluß verschiedenartiger Beheizung während längerer Versuchsdauer

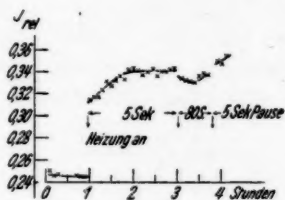


Fig. 13.

die emittierte Menge plötzlich sehr stark, von 24,8 auf 31,2% bzw. von 24,5 auf 31,4% an, um bei weiterhin unveränderter Beheizung sich gegen einen Grenzwert zu vergrößern.

In der Fig. 12 ist die Abnahme der Elektronenmenge bei Verringerung der Heizdauer recht deutlich, besonders kurz nach Änderung der Versuchsbedingung. Aus dem nach Ende der Beheizung sich einstellenden Abfall kann man die Zeit bis zum Wiedererreichen des „Normal“-Zustandes auf immerhin einige Stunden veranschlagen. Da die Schicht schon in viel kürzerer Zeit nach Ende der Beheizung wieder Zimmertemperatur annimmt, geht hieraus einwandfrei hervor, daß die Temperaturänderung selbst nicht die unmittelbare Ursache der beobachteten Erscheinungen sein kann, wie auch Rudberg¹⁾ bemerkt.

In Fig. 13 wird auch die Verschiebung der Heizperiode innerhalb des Dreiminutenintervalls erkenntlich. Jedoch bleibt die dadurch verursachte Abnahme der relativen Elektronenmenge gegenüber der Gesamtänderung von etwa 10% bei Einstellen der Heizung so klein, daß daraus auf eine trotz der intermittierenden Beheizung verhältnismäßig geringe Zustandsänderung der Schicht während der Einzelmessung geschlossen werden muß.

1) E. Rudberg, K. Svensk. Vet. Akad. Handl. 7/1. S. 124. 1929.

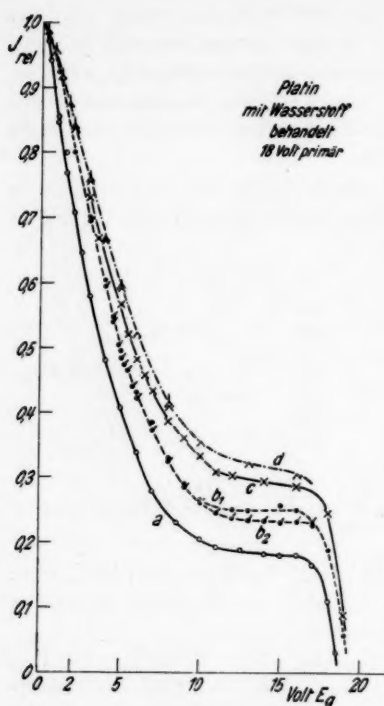


Fig. 14. Gegenspannungskurven an Platin bei Wasserstoffbehandlung

Tabelle können die verschiedenen Behandlungsweisen mit den zugehörigen Kurvenzeichen ersehen werden. Um die Größe des

Künstliche Einwirkung von Wasserstoff

Beladungsversuche an Platin

Die in den bisher dargestellten Messungen gefundene Abhängigkeit der Verteilungskurven vom Schichtzustand legte einen Versuch mit künstlicher Gasbeladung nahe. Mit Hilfe des in der Apparaturbeschreibung erwähnten Palladiumröhrchens konnte in das Versuchsrohr Wasserstoff (einige Millimeter Hg) eingebracht werden, der zur Einwirkung über Nacht darin verblieb. Um die Wasserstoffaufnahme zu unterstützen, wurde meistens die Schicht zur Zeit des Gaseinlassens ein- oder mehrmal einige Minuten lang mit 5 Amp. beheizt.

Die mit 18 Volt Primärspannung an einer Platinschicht gewonnenen Resultate sind in Fig. 14 zusammengestellt. Aus der beigefügten

Datum	Messung Zeichen	Gasdruck mm Hg	Einwirkung Stunden	Beheizung 5 Amp.
früher	○ a	0	—	keine
26. 5.	—	etwa 5	13	—
27. 5.	—	10	21	—
28. 5.	vorm. ● b ₁ nachm. ● b ₂	—	—	—
29. 5.	—	10	11	—
30. 5.	—	20	20	7 Minuten
31. 5.	nachm. × c	20	27 1/2	5 „
1. 6.	vorm. nicht eingezeichnet	20	14	10 1/2 „
4. 6.	—	20	66	10 „
5. 6.	vorm. ∧ } d abends λ }	20	16 1/2	5 „
8. 6.	—	—	66 1/2	5 „

Variationsbereichs recht zu veranschaulichen, ist eine früher an unbeheizter Schicht gemessene Verteilung mit eingezeichnet (\circ), die im gesamten besonders niedrige Werte, ähnlich der Kurve *b* in Fig. 6, aufweist.

Nach der ersten Wasserstoffeinwirkung, die *ohne* unterstützende Beheizung vor sich ging, kommt eine Kurve (b_1) zum Vorschein, die sich von den bekannten „Normal“-kurven der unbeheizten Schicht nicht unterscheidet. Nur liegt vielleicht das gut ausgeprägte waagerechte Teilstück etwas höher, als dem „Normal“-wert entspricht (vgl. auch Fig. 5), da es sich am Nachmittag ohne weitere Gas- oder Hitzeinwirkung etwas tiefer findet. Nur eine Nacht während alleiniger Anwesenheit von Wasserstoff im Versuchsrohr scheint also für eine merkliche Schichtänderung noch nicht auszureichen.

Wird aber die Schicht während des Wasserstoffzutretens auch beheizt (vgl. die Tabelle), so ergibt die Messung am folgenden Tag durchweg beträchtlich höhere Werte (*c*). Daß überdies die waagerechte Lage des Teils zwischen 12 und 16 Volt E_g verlorengeht, muß besonders vermerkt werden. Wir erhalten damit einen Kurventypus, der sich dem bei Beheizung gefundenen nähert, für den aber, wie aus Fig. 12 zu ersehen ist, eine Nachwirkung der Beheizung in dem *dort* betrachteten Sinne nicht verantwortlich gemacht werden kann. Verlängerte Beheizung vergrößert die Werte der Kurve *c* nur wenig (nicht eingezeichnet). Nach 82½-stündiger Wasserstoffeinwirkung mit zweimaliger Beheizung wird die Kurve noch 2–3% höher gefunden (*d*). Eine wiederholende Messung nach ähnlicher Behandlung der Schicht ergibt fast dieselben Werte.

Genau das gleiche Verhalten ist auch bei Messungen mit 14 Volt Primärgeschwindigkeit beobachtet worden.

Die hier mitgeteilten Ergebnisse lassen es als immerhin möglich erscheinen, daß die Kurvenänderungen, die bei Beheizung der Schicht gefunden werden, ebenfalls durch Wasserstoff verursacht sind, der, vom Platin absorbiert, infolge der Beheizung zu verstärkter Wirkung gelangt. Es wurde deshalb versucht, ob nicht Palladium, das ja besonders leicht und viel Wasserstoff aufnimmt, noch deutlichere Einflüsse als die bisher festgestellten in Erscheinung treten läßt.

Beladungsversuche an Palladium

Da sich das zuvor benutzte Palladiumblech bei den ersten Messungen infolge seiner starken Gasabgabe bei Beheizung als ungünstig erwiesen hatte, kam eine auf das bekannte Quarzplättchen gestäubte Palladiumschicht zur weiteren Verwendung. Sogleich nach

Herstellung wurde diese Schicht ins Vakuum gebracht und ohne weitere Behandlung bei 18 Volt Primärspannung untersucht (Fig. 15, Kurve a). Sehr auffällig ist, daß das Kurvenstück zwischen 11 und 17 Volt E_g keinesfalls die sonst gefundene waagrechte Lage

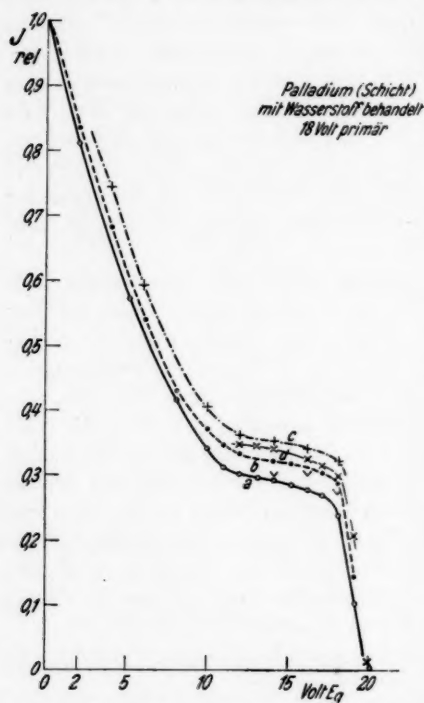


Fig. 15. Gegenspannungskurven an Palladium bei Wasserstoffbehandlung

zeigt, sondern ziemlich geneigt verläuft. Wir haben hier eine Kurve vor uns, die den an Platin mit Wasserstoffbeladung gefundenen gleicht. Es ist zu vermuten, daß die Palladiumschicht, da sie sehr rasch nach Herstellung gemessen wurde, noch vom Zerstäuben her mit Wasserstoff beladen war. Doch ist auch ein Nachwirken starker Schicht-erhitzung während des Bestäubens in Betracht zu ziehen.

Die Schicht wurde dann eine Nacht lang ohne zusätzliche Beheizung eingelassenem Wasserstoff ausgesetzt. Messung am folgenden Morgen ergab die Kurve b der Fig. 15. Sie liegt im gesamten etwas höher, vor allem der Anteil der elastisch

Datum	Art der Schichtbehandlung	Messung Zeichen
5. 7.	vormittags frisch erzeugte Schicht ohne künstliche Beladung, ohne Beheizung abends Wasserstoffeinlaß (etwa 20 mm Hg)	— nachm. ○ a
6. 7.	nach 15 Stunden Einwirkung nach 3 × 5 Minuten Beheizung in Abständen abends Wasserstoffeinlaß (etwa 40 mm Hg) und 5 Min.	vorm. ● b nachm. + c
7. 7.	Beheizung nach 15 Stunden Einwirkung nach kurzem Einlassen von Luft (20 mm Hg)	— vorm. × d mittags ∇

gestreuten Elektronen hat um etwa 4% zugenommen. Nachfolgendes dreimaliges Ausheizen der Schicht mit 6 Amp. je 5 Min. lang ohne erneute Wasserstoffeinwirkung ließ die Kurve *c* finden, die um nochmals 3–4% höher liegt, ohne waagrecht zu verlaufen. Weitere Einwirkung von Wasserstoff (Beheizung nur 5 Min.) über Nacht zeitigte die Kurve *d*, die ein wenig tiefer liegt, aber noch stärker geneigt verläuft. Nach kurzzeitigem Einlaß von Luft (20 mm Hg) wurden einige wenige Punkte gemessen (V), die einen wieder waagrechten Verlauf andeuten. Doch läßt ihre geringe Anzahl eine sichere Aussage nicht zu.

Bei Palladium ergibt sich also ganz der gleiche Einfluß der Beladung wie bei Platin. Im gesamten sind jedoch die Veränderungen der Kurven infolge der Wasserstoffeinwirkung lange nicht so bedeutend wie die durch die Beheizung erzielten.

Deutungsversuche

Es unterliegt keinem Zweifel, daß die von Becker¹⁾ ausgesprochene Zuordnung der drei hauptsächlich zu beobachtenden Elektronengruppen als „reflektierte“, „rückdiffundierte“ und „sekundäre“ Elektronen richtig ist. Während für den elastisch gestreuten Anteil eine Erklärung nicht schwer fällt, läßt bei den beiden andern Gruppen die große Mannigfaltigkeit der beim vorliegenden Problem in Betracht zu ziehenden Möglichkeiten entscheidende Aussagen über die Vorgänge, die letzten Endes zu den gefundenen Verteilungen führen, nicht zu²⁾. Wir müssen uns darauf beschränken, aus den möglichen Vorstellungen Anhaltspunkte für die Deutung unserer Ergebnisse zu gewinnen.

Zuerst soll eine kleine Rechnung erläutern, in welchem Bereich unserer Schicht sich die Vorgänge abspielen. Becker³⁾ gibt den Absorptionskoeffizienten von Nickel für Elektronen der Geschwindigkeit 100 Volt zu $15 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$ an, woraus sich unter Annahme der Gültigkeit des Massenproportionalitätsgesetzes der Wert für Platin zu $3,6 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1}$ errechnet. Daraus folgt, daß die Intensität des Primärstrahls nach einem Schichtweg von 126 ÅE auf $\frac{1}{100}$, nach 190 ÅE auf $\frac{1}{1000}$ der einfallenden Intensität abgeklungen ist. Bei einem Einfallswinkel von 70° gegen die Normale entspricht das,

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 273. 1925.

2) E. Rudberg, Proc. Roy. Soc. A 121. S. 426. 1928; O. W. Richardson, ebenda, A 119. S. 531. 1928.

3) A. Becker, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 258. 1929.

Weiterlauf in gleicher Richtung vorausgesetzt, einer Schichttiefe von 43 und 65 ÅE oder ungefähr 22 und 33 Atomschichten. Innerhalb einer so dünnen Schicht kommt also unsere Emission zur Entstehung (vgl. S. 280).

Bei den hier benutzten geringen Primärgeschwindigkeiten ist nach dem gefundenen Kurvenverlauf eine sichere Abtrennung der reinen Sekundärstrahlung von den verlangsamten Primärelektronen nicht leicht möglich. Zwar kann man annehmen, daß die langsame Gruppe der unbeheizten Schicht, vor allem die Elektronen geringster Geschwindigkeit, zum größten Teil aus wahren Sekundärelektronen besteht, und weiter, daß die bei Beheizung an der Stelle der Lücke auftretenden Elektronen verlangsamte primäre sind. Es läßt sich aber der mengenmäßige Anteil dieser beiden an der Geschwindigkeitsverteilung nicht sicher bestimmen. Klar ersichtlich ist jedoch, daß die sehr langsamen Elektronen an der unbeheizten Schicht besonders bevorzugt auftreten.

Nähere Angaben können über die nicht verlangsamten (reflektierten) Primärelektronen und über die auftretende Geschwindigkeitslücke gemacht werden. Die gleichmäßige Abnahme des Primäranteils mit steigender Primärspannung (Fig. 5) erklärt sich daraus, daß die Primärelektronen um so tiefer in die Schicht eindringen und um so mehr von ihnen an Energie verlieren, je rascher sie sind, wobei die Energiestufen der beschossenen Atome nicht in Erscheinung treten.

Aus der Art der Versuchsfolgen (z. B. Fig. 6) muß geschlossen werden, daß wir es in allen Fällen, in denen die Geschwindigkeitslücke deutlich erscheint, mit einer mit Luft beladenen Schicht zu tun hatten. Hierfür spricht auch die Bevorzugung der sehr langsamen Elektronen bei diesen Schichten, die sich aus der zusätzlichen Streuwirkung des Schichtgases erklärt. Wenn bei Wasserstoffbeladung eine ähnlich ausgeprägte Lücke nicht zu finden ist, so muß hierfür offenbar das geringere Streuvermögen dieses leichten Elements verantwortlich gemacht werden.

Die konstante Lückenbreite von 5 bis 6 Volt kann nicht einer entsprechenden Änderung der Austrittsarbeit zugeschrieben werden¹⁾. Man muß vielmehr annehmen, daß hier Energiestufen der absor-

1) Man vergleiche dagegen bei lichtelektrischen Versuchen: G. Lang, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 718. 1933; A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektr. Gasentl. 1932. S. 7; H. Simon u. R. Suhrmann, Lichtel. Z. u. ihre Anwendung 1932. S. 18.

bierten Gase zutage treten¹⁾. Die Ähnlichkeit der Kurven der wasserstoffbehandelten und der beheizten Schichten ließe den Schluß zu, daß bei den letzteren im Metall absorbiertes Wasserstoff durch die Beheizung zur Wirkung gelangt. Doch kann trotz der deutlichen Kurvenänderung, die die verschiedenartige Wasserstoffbehandlung hervorruft, nicht entschieden werden, ob die beobachteten Verteilungen wesentlich durch dieses Gas mitbestimmt sind oder ob sie dem mehr oder minder luftfreien Metall zugeschrieben werden müssen.

Zusammenfassung

1. Dünne Silber-, Platin- und Palladiumschichten werden mit Primärelektronen geringer Geschwindigkeit (< 100 Volt) unter dem Einfallswinkel von 70° gegen die Normale beschossen. Untersucht wird die Geschwindigkeitsverteilung der senkrecht austretenden Elektronen mit der Lenard-Beckerschen Gegenfeldmethode und die Änderung dieser Verteilung durch Beheizung und Gasbeladung der Schichten.

2. Die Verschiedenheit des Schichtmaterials hat keinen wesentlichen Einfluß auf die Gestalt der Kurven.

3. Nichtbeheizte Schichten zeigen zwei durch eine „Lücke“ völlig getrennte Geschwindigkeitsgruppen, die einerseits von unverlangsamten reflektierten und andererseits von langsameren Elektronen gebildet werden. Elektronen mit Geschwindigkeitsverlusten bis zu einigen Volt sind gar nicht vorhanden. Der Anteil reflektierter Elektronen wächst zunehmend mit sinkender Primärspannung. Die langsame Gruppe besteht wohl überwiegend aus sehr langsamen wahren Sekundärelektronen, deren häufigste Geschwindigkeit 2 bis 3 Volt beträgt.

4. Beheizung der Schichten läßt die Geschwindigkeitslücke völlig verschwinden. In diesem Bereich treten Elektronen auf, die als rückdiffundierte anzusprechen sind. Bevorzugt erscheinen die unter 3. genannten Gruppen. Nach Ende der Beheizung tritt langsame Rückbildung des alten Zustandes ein.

5. Behandlung der Schichten (Platin und Palladium) mit reinem Wasserstoff hat einen ähnlichen, aber geringeren Einfluß auf die Gestalt der Kurven wie die Beheizung. Die bei den „normalen“ Schichten vorhandene Geschwindigkeitslücke kann also jedenfalls

1) Für Luft und Stickstoff werden 7—8 Volt angegeben: K. T. Compton u. F. L. Mohler, Fortschr. d. Phys. u. phys. Chemie 18/6. S. 131. 1925.

nicht auf Wasserstoff zurückgeführt werden, sondern es müssen offenbar andere Gase (Sauerstoff, Stickstoff), bzw. durch sie verursachte Schichtzustände dafür verantwortlich sein.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung des Hrn. Professor Dr. A. Becker im Physikalisch-radiologischen Institut der Universität *Heidelberg* unternommen und durchgeführt.

Für dauernde Unterstützung und steten Ratschlag bin ich meinem verehrten Lehrer zu herzlichem Dank verpflichtet.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut.

(Eingegangen 26. Juli 1935)

Zusatz bei der Korrektur:

Nach Drucklegung kam uns eine Arbeit von Haworth¹⁾ zur Kenntnis, die mittels magnetischer Analyse die Elektronenemission von Molybdän nach besonders ausgiebiger Erhitzung untersucht. Soweit sich Vergleiche anstellen lassen, stimmen die Ergebnisse mit den unsern überein; doch finden wir, daß dem Verf. wesentliche insbesondere deutsche Literatur über den Gegenstand entgangen zu sein scheint.

1) L. J. Haworth, Phys. Rev. 48. S. 88. 1935.